Marcus Berg

Lösningsförslag
Omtentamen, Kvantfysikens principer
23/8, 2008

---

(1) a) Antalet vågor: $n = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{2\pi/k} = \frac{kL}{2\pi}$

$$\Delta n = \frac{\Delta k \cdot L}{2\pi}$$ (osäkerheten i L försummas)

$$\therefore \quad \Delta k = \frac{2\pi\,\Delta n}{L} = \frac{2\pi \cdot 1}{1\,\text{mm}} \approx 6\,(\text{mm})^{-1}$$

b) $\Delta x\,\Delta k = 0{,}5\,\text{mm} \cdot 6\,(\text{mm})^{-1} = 3$

För att få ett mer lokaliserat vågtåg behöver vi <u>fler</u> olika "bas-vågor", så när $\Delta x \to 0$ så har vi $\Delta k \to \infty$.

c) För t.ex. elektroner är det speciellt kvantfysiska att vi ser den som en <u>våg</u> (den beskrivs av en vågfunktion) trots att den mäts som en <u>partikel</u>, och för vågen har vi $k = \frac{p}{\hbar}$. Det är alltså å ena sidan en fråga om <u>tolkningen</u> av vågen, å andra sidan är <u>mini</u>-osäkerheten just precis $\frac{\hbar}{2}$, inte t.ex $3\hbar$. (jfr. ovan)

d) $\delta x \, \delta p = 1\text{nm} \cdot 10^{-20}\ \text{kgm/s}$

$= 10^{-9} \cdot 10^{-20}\ \text{kgm}^2/\text{s} = 10^{-29}\ \text{Js}$

(från t.ex. $F = ma$, $W = Fs$, erinrar vi oss att enheten Joule är $\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{kg m}^2/\text{s}^2$)

$$\frac{\text{mätoneggrannhet}}{\text{mikroobestämdhet}} = \frac{10^{-29}\ \text{Js}}{\hbar/2} \approx \frac{10^{-29}\ \text{Js}}{10^{-34}\ \text{Js}} \approx 10^5$$

Ng, vi kommer inte att märka att det finns en undre gräns $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ när vårt experiment har 100 000 gånger högre oneggrannhet.

---

② a) in: $|+\rangle$, ut: $|-\rangle$

$$\langle - | A | + \rangle = \frac{1}{2}$$

$$P(|+\rangle \text{ in}, |-\rangle \text{ ut}) = |\langle - | A | + \rangle|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$$

b) opolariserat = hälften $|+\rangle$, hälften $|-\rangle$.

in: $|+\rangle$: $|\langle - | A | + \rangle|^2 + |\langle + | A | + \rangle|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

in: $|-\rangle$: $|\langle - | A | - \rangle|^2 + |\langle + | A | - \rangle|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

totalt kommer ut: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) = \frac{5}{8}$

förlorat: $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

c) på samma sätt

kommer ut:

$$\frac{1}{2}\left(|\langle +|B|+\rangle|^2 + |\langle -|B|+\rangle|^2 + |\langle +|B|-\rangle|^2 + |\langle -|B|-\rangle|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

förlorat: $\frac{1}{2}$

d) Apparat AB: (jfr. formelsamling, t.ex. (50))

$$\langle i|AB|j\rangle = \sum_{k=+,-} \langle i|A|k\rangle\langle k|B|j\rangle$$

t.ex. $\langle +|AB|+\rangle = \langle +|A|+\rangle\langle +|B|+\rangle + \langle +|A|-\rangle\langle -|B|+\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-i}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{4}$$

på samma sätt $\langle +|AB|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$$= \frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}$$

$$\langle -|AB|+\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}$$

$$\langle -|AB|-\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{i}{4} + \frac{1}{4}$$

för reella tal a och b gäller $|a+ib|^2 = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$

kommer ut: $\frac{1}{2}\left(\left|\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{4}\right|^2 + \left|\frac{i}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right|^2 + \left|\frac{1}{4} - \frac{i}{4}\right|^2 + \left|\frac{i}{4} + \frac{1}{4}\right|^2\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{10}{16}\right) = \frac{5}{16} \Rightarrow \text{förlorat } \frac{11}{16}$$

③ a) $P = |\psi_2(\vec{r})|^2 = \frac{1}{8\pi} a_0^{-3} e^{-r/a_0} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)^2$

enhetslöst

$[P] = [a_0^{-3}] = (\text{längd})^{-3}$

(OK svar: $\frac{1}{m^3}$ eller $\frac{1}{(nm)^3}$)

Det är <u>sannolikhet per volym</u>, så det är rimligt att det är $1/(\text{längd})^3$.

b) sätt $x = r/a_0$

"beteckna med"

$$P \propto e^{-x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 =: f(x)$$

$$f'(x) = -e^{-x}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + e^{-x}\,2\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= e^{-x}\left(-\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 + (-1)\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= e^{-x}\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(-\left(1-\frac{x}{2}\right) - 1\right)$$

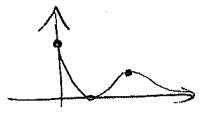
"sätt lika med"

$$= -2e^{-x}\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-2\right) \overset{!}{=} 0$$

en rot i $x = 2$, en i $x = 4$ (för $x < \infty$)

Prova: $f(2) = 0$, $f(4) = 0.02$

Prova gränsema: $f(0) = 1$ $\Rightarrow$



(jämför graf i kompendiet s. 105, som är för $x^2 P(x)$)

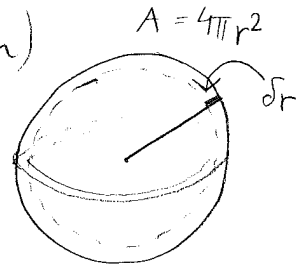
Maximala sannolikhets<u>densiteten</u> P är i $r = 0$.

(Lokalt maximum i $r = 4a_0$, $\frac{1}{2}$ poäng)

c) Sannolikhet = (Sannolikhetsdensitet)·(Volym)

$= P \cdot 4\pi r^2 \cdot \delta r$

i 3 dimensioner



d) Globalt maximum $r = 0$: $P(0) = \frac{1}{8\pi}\frac{1}{a_0^3} f(0) \approx 2{,}7 \cdot 10^{23}/m^3$

Sannolikhet $\approx P(0) \cdot 4\pi r^2 \cdot \delta r$

$= \frac{3{,}7 \cdot 10^{23}}{m^3} \cdot 4\pi \cdot (1\,nm)^2 \cdot (1\,nm)$

(det här "skalet" har ingen hålighet)

$\approx 0{,}003 = 0{,}3\,\%$

Lokalt maximum $r = 4a_0$: $P(r = 4a_0) = \frac{1}{8\pi a_0^3} \cdot f(4) \approx 4{,}9 \cdot 10^{21}/m^3$

Sannolikhet $\approx P(r = 4a_0) \cdot 4\pi r^2 \cdot \delta r$

$= \frac{4{,}9 \cdot 10^{21}}{m^3} \cdot 4\pi \cdot (4 \cdot 5{,}9\,nm)^2 \cdot (1\,nm)$

$= 0{,}03 = 3\,\%$ $\frac{1}{2}$ poäng

4

Bosoner : $P = |A(\theta) + A(\pi - \theta)|^2$ om identiska.

Fermioner : $P = |A(\theta) - A(\pi - \theta)|^2$

Notera $P(\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} |2A(\frac{\pi}{2})|^2 = 4|A(\frac{\pi}{2})|^2 & \text{bosoner} \\ 0 & \text{fermioner} \end{cases}$

90°

a) fermioner, enligt ovan (0% i 90°)

b) bosoner, enligt ovan ($\neq$ 0% i 90°)

c) Nej, för det kan gälla $A(\frac{\pi}{2}) = 0$ för bosoner, då spelar ovanstående ingen roll. I a) och b) visste vi att det bara fanns en $A(\theta)$ i bägge fallen, så vi ser i högerfiguren att $A(\frac{\pi}{2}) \neq 0$. Bara då vet vi vad som är vad.

(5) a) Uppmäta $|1\rangle$: $\langle 1|1\rangle = 1, \quad \langle 1|2\rangle = 0$

$$P = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \left| e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \cos\frac{At}{\hbar} \right|^2 = \cos^2\frac{At}{\hbar}$$

$\frac{At}{\hbar}$ vid $t = 10^{-11}$ s är $\frac{10^{-4} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}}{1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}} = 1{,}52$

$$\cos^2(1{,}52) = 0{,}002 = 0{,}2\,\%$$

b) Uppmäta $E_0 + A$, dvs. $|I\rangle$

(Om du inte minns att energin hos $|I\rangle$ är $E_0 + A$: jämför formel (61) och (62) i kompendiet:
$c_1(t) - c_2(t) = b\, e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$)

$$|\langle I|\psi(t)\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1| - \langle 2|\right)\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\cos\frac{At}{\hbar}|1\rangle + i\sin\frac{At}{\hbar}|2\rangle\right)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|\cos\frac{At}{\hbar} - i\sin\frac{At}{\hbar}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{-\frac{iAt}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

alltid 50%, oavsett t.

c) tillståndet är i en superposition av $|I\rangle$ och $|II\rangle$ innan vi mäter det, så <u>oavsett</u> mätnoggrannheten kan vi för ett enskilt experiment bara säga att de mäts med 50% sannolikhet vardera, inte vad en enskild mätning ger.

För många experiment (mätningar) gör vi alltså en exakt förutsägelse ("50% av varje") men för en enskild mätning kan vi inte säga vilken det blir.

d) $|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$

jfr. formel (61) & (62):

för $A \ll E_0$ har vi $c_1(t) \approx \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}$

$= \frac{a+b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}$

så tex. $|1\rangle$ blir mer och mer som ett stationärt tillstånd när vi minskar A. ($|c_1(t)|^2 \to$ konstant.)

Eftersom A tolkas som tunnlingsenergin mellan $|1\rangle$ och $|2\rangle$ kommer vi inte att se effekter av kvant-tunnling för $A \ll E_0$, vi mäter alltid energi $\approx E_0$ och märker ingen kvantfysik.

---

(6) a) Fotoner går in i ett tillstånd med $\bar{n}$ fotoner med sannolikhet $\propto (\bar{n}+1)$ (jfr. Feyman s 4–7), "bosoner är sociala"

$\Rightarrow$ svar 4. (svar 3 ger 1,5p av 2p)

b) $N_g \bar{n} = N_e(\bar{n}+1)$ (sannolikhet $|a|^2$ tas ut)

$\bar{n}(N_g - N_e) = N_e \Rightarrow \bar{n} = \frac{N_e}{N_g - N_e} = \frac{1}{\frac{N_g}{N_e} - 1}$

men $\frac{N_g}{N_e} = e^{+\beta\hbar\omega}$ så $\underline{\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}}$

$\therefore E_{medel} = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \to 0$ för $\omega \to \infty$, undviker "ultravioletta katastrof"

$\left(\to \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}} \to \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega} \to 0 \right)$ (se Feynman s.4–11)