

Förslog till Lösning

Tentamen 7/6 2008

KVANTFYSIKENS PRINCIPER
Marcus Berg

①

a)

{ + }
- |

A

{ + }
- |

B

{ + }
- |

A

b)

$$\langle +A| +B \rangle \langle +B| +A \rangle$$

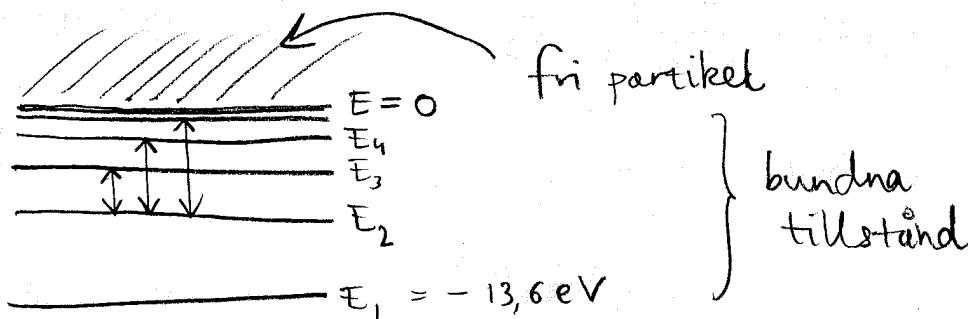
$$+ \langle +A| -B \rangle \langle -B| +A \rangle$$

c)

Silver har en elektron i ett eget skal ("5s"), och resterande 46 kan betraktas som ett "moln" med totalt rörelsemängdsmoment noll. Approximatirt blir det som om vi bara hade en elektron med spinn $\frac{1}{2}$. (Kärnan har också spinn, men det visar sig inte heller påverka experimentet.)

②

a)



(absorption - polar eg. uppåt)

①

b) Första linjen: $E_3 - E_2 = 1,89 \text{ eV}$

$$\Rightarrow E_3 = E_2 + 1,89 \text{ eV} = -1,51 \text{ eV}$$

Andra linjen: $E_4 - E_2 = 2,55 \text{ eV}$

$$\Rightarrow E_4 = E_2 + 2,55 \text{ eV} = -0,85 \text{ eV}$$

Antag $E_n = -\frac{R}{n^2}$. Från E_1 ser vi $R = 13,6 \text{ eV}$.

Stämmer det med E_2, E_3, E_4 ?

$$-\frac{13,6}{2^2} = -3,4, \quad -\frac{13,6}{3^2} = -1,51, \quad -\frac{13,6}{4^2} = -0,85$$

Ja.

c) I en klassisk värld kan elektronen ha energier mellan energicema vi ser i de kvantmekaniska tillstånden. Då borde alla linjer mellan de här linjerna också synas, inte bara några stegvisa. Spektrat vore kontinuerligt, inte kvantiserat.

③ $|4(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$

a) $|1\rangle$ vid $t=0 \Rightarrow c_1(0) = 1, c_2(0) = 0$

$$c_1(0) = \frac{a+b}{2}, \quad c_2(0) = \frac{a-b}{2} \Rightarrow a=1, b=1$$

$$|4(t)\rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} (e^{\frac{i}{\hbar}A_t} + e^{-\frac{i}{\hbar}A_t}) |1\rangle \\ + \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} (e^{\frac{i}{\hbar}A_t} - e^{-\frac{i}{\hbar}A_t}) |2\rangle$$

②

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left(\cos \frac{At}{\hbar} |1\rangle + i \sin \frac{At}{\hbar} |2\rangle \right)$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

{ Antingen minns man det, eller från Euler's formel:

$$e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos(-x) + i \sin(-x))$$

$$= \cos x + i \sin x + \cos x - i \sin x \\ = 2 \cos x$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = \cos x + i \sin x - (\cos x - i \sin x) \\ = 2i \sin x$$

b)

$$P(E_0+A) = P_I = |\langle I | \psi(t) \rangle|^2$$

TVÅ alternativa räkningar (bågge OK)

$$1) \langle I | \psi(t) \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left(\cos \frac{At}{\hbar} \underbrace{\langle I | 1 \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + i \sin \frac{At}{\hbar} \underbrace{\langle I | 2 \rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) \\ = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iAt}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0+A)t}$$

$$\Rightarrow P_I = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\text{reellt tal})} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \text{ allat}$$

$$2) |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left\{ \cos \frac{At}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + |II\rangle) \right) + i \sin \frac{At}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (-|I\rangle + |II\rangle) \right) \right\}$$

{ eftersom $\frac{1}{\sqrt{2}} (|I\rangle + |II\rangle) = |1\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}} (-|I\rangle + |II\rangle) = |2\rangle$ }

$$= \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \left(\cos \frac{At}{\hbar} - i \sin \frac{At}{\hbar} \right) |I\rangle}_{=: C_I(t)} + (\text{term med } |II\rangle) \\ = C_I(t) + P_I = |C_I|^2 = \frac{1}{2} \text{ allat}$$

c) $P(t_0+A) = \frac{1}{2}$ för alla t enligt b).

d) För det första kan man inte direkt ta reda på vad tillståndet är före mätning, nogräknat, speciellt inte för icke-stationära tillstånd som $|1\rangle$ och $|2\rangle$.

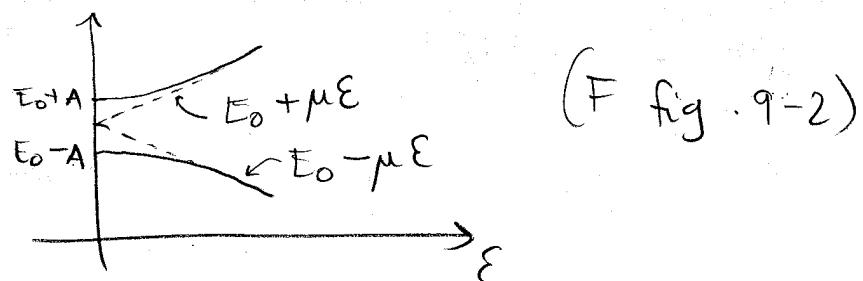
Men, om vi tolkar frågan som att vi vid någon tidpunkt är "ganska säkra" att vi har t. ex. $|2\rangle$, hur kan vi testa det?

Ide 1: Mät energi och jämför med någon räkning.

Vid $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{3\pi}{2}$, $t=\frac{5\pi}{2}$ osv. har vi t-ex 100% chans att hitta $|2\rangle$. Vi har sett i a) och b) att vi inte kan testa det genom att mäta energin, tyvärr. \therefore Går ej.

Ide 2: Slå på ett elektriskt fält \vec{E} .

Då ändrar sig energierna som



(F fig. 9-2)

För stora fält E blir "flippenergin" A mer och mer försumbar (jfr klassiska gränder) och $|1\rangle$ och $|2\rangle$ mer och mer stationära, så vi kan vara ganska säkra på att mäta t-ex. $|2\rangle$ om \vec{E} pekar upp, som i Feynman fig 9-1.

(4)

a) $\langle V | H \rangle \langle H | D \rangle = 0$

b) $\langle V | H \rangle \langle H | D \rangle + \langle V | V \rangle \langle V | D \rangle$

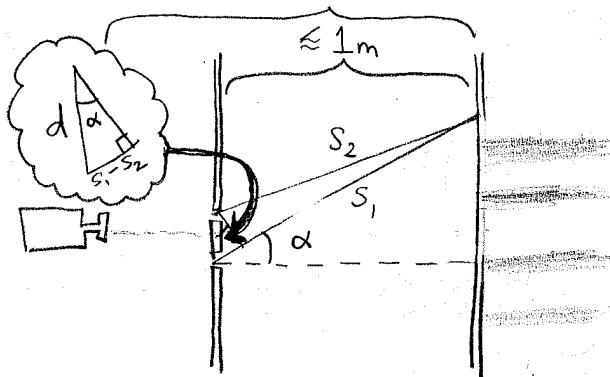
c) $P_a = |\underbrace{\langle V | H \rangle}_{=0} \langle H | D \rangle|^2 = 0$

$$\begin{aligned} P_b &= \left| \underbrace{\langle V | H \rangle}_{=0} \langle H | D \rangle + \langle V | V \rangle \underbrace{\langle V | D \rangle}_{=1} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 50 \text{ fotoner} \end{aligned}$$

d) Nej inte "exakt" — det finns alltid lite "brus". Men om experimentet är så bra som de vi såg på experimentdagen, med $\lesssim 1\%$ noggrannhet, borde vi på sin höjd få 49, 50 eller 51 fotoner, i fall b. Exempelvis kan stråldelarna (\square) vara inexacta, så några få $|V\rangle$ släpps igenom där det bara skulle vara $|H\rangle$.

(5)

(5)



(intervallentlig)

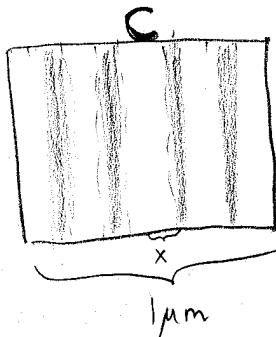
centralmaximum C

Första minimum (mörkt band): $S_1 - S_2 = \frac{\lambda}{2}$ (se kompendium)

$$\sin \alpha = \frac{S_1 - S_2}{d} = \frac{\lambda}{2d}$$

$$L \gg d \Rightarrow \sin \alpha \approx \alpha \Rightarrow \alpha \approx \frac{\lambda}{2d} \quad (\star)$$

bild d:



$x \approx \frac{1}{8} \cdot 1 \mu\text{m}$: från centrum till första minimum

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{x}{L}$$

$$L \gg x \Rightarrow \tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{x}{L} \quad (\star\star)$$

$$(\star), (\star\star) \Rightarrow \frac{\lambda}{2d} \approx \frac{x}{L} \Rightarrow \lambda \approx \frac{2d \cdot x}{L} = \frac{2 \cdot 1\text{mm} \cdot \frac{1}{8}\mu\text{m}}{1\text{m}}$$

$$\underline{\lambda \approx 0,3 \text{ nm}} \quad (= 3 \text{ Å})$$

$\approx 0,01 \text{ eV}$

⑥ a) $p = \hbar k$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow p = \hbar \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow v = \frac{p}{m_e} \approx 3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{(\hbar \frac{2\pi}{\lambda})^2}{2m_e} \approx \frac{(1,05 \cdot 10^{-34} \frac{2\pi}{7 \text{ nm}})^2}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \approx 4 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Kanon: $1 \text{ mW} = 1 \text{ mJ/s} = 10^{-3} \text{ J/s}$

antal elektroner/s : $\frac{10^{-3} \text{ J/s}}{4 \cdot 10^{-18} \text{ J}} = \frac{1}{4} \cdot 10^{15} / \text{s}$

på en sekund: en elektron åker $3 \cdot 10^6 \text{ m}$ (se v ovan)

så om de kommer ned jämn mellanum har

vi väldigt många i exp. Samtidigt \Rightarrow ja, terciden!

1m långt

(6)

b) Det är viktigt att inte ha koincidens i ett experiment där vi hördar att vi ser en partikel åt gången. I det riktiga Hitachiexperimentet kommer det bara 10 elektroner per sekund, då är det inget problem, man har inte koincidens.

(Notera: säger man att man borde ha ett "filter" i a, som i foton-exp. (10^{-17}) är det OK att svara nej i a — som det är i det riktiga exp.)

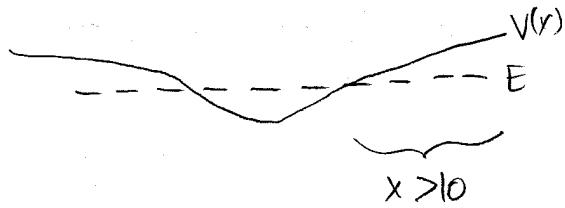
⑦

a) tidsberoende S-ekr. (ekr. (68); formelsamln.)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) = (E - V(x)) \phi(x)$$

Vi ser att om $E - V(x)$ är negativ då är $\phi''(x) \propto +\phi(x)$, dvs. "konkar bort från x-axeln" (typ e^{-x})

Så för $x > 10$ verkar det som om vi har $V(x) > E$.

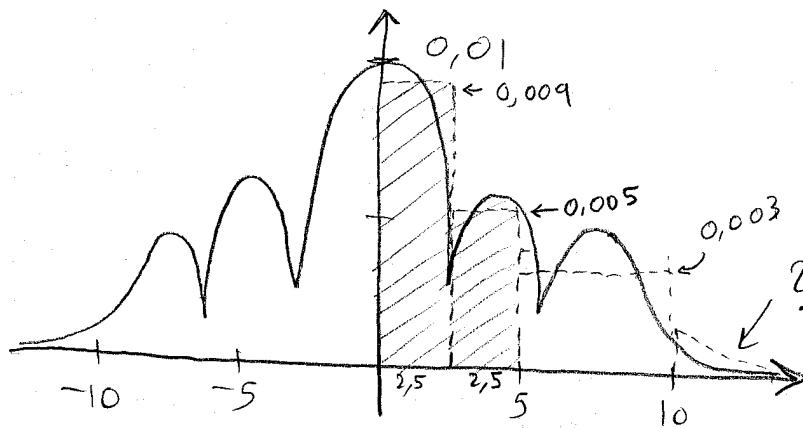


"klassiskt förbjudet" område, för en partikel med energi E kan inte

ta sig in i det området i klassisk fysik.

b) $|\psi(r,t)|^2 = \text{tidsberoende} \Rightarrow \psi(x,t) \text{ stationär}$
 $\psi(x,t)$ själv är inte tidsberoende
 $=$ (jfr. Java-animering)

c)



t.ex två Riemannintegral-staplar :

$$\begin{aligned} \text{area} &= 0,009 \cdot 2,5 + 0,005 \cdot 2,5 \\ &= 0,035 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(x=0 \text{ till } x=5) = 0,035 = 3,5\% \approx \underline{\underline{4\%}}$$

d)

Man kan inte tö en liten triangel i $x > 10$ som i bilden, för då skulle totala sannolikheten vara $\ll 100\%$.

Vi vet inte hur $|f(x)|^2$ går vidare mot $x \rightarrow \infty$, bara att den är konkvav bort från x -axeln. (Vi har inte antagit att $V(x)$ är bitvis konstant heller, så lösningen behöver inte vara precis e^{-x} .)

$$\begin{aligned} \text{Men vi kan uppskatta } P(x=-10 \text{ till } x=10) \\ \text{till area } &\approx (0,035 + 0,003 \cdot 5) \times 2 \\ &= 0,1 = 10\% \end{aligned}$$

Alltså är $P(x > 10) \approx \frac{100-10}{2} = \underline{\underline{45\%}}$ om $f(x)$ symm.

(tag t-ex. $\int_0^\infty dx e^{-x^n} = n!$ — sjunker långsamt)

\Rightarrow stor area trots pytteliten höjd
 $\propto n!$

⑧ Essäfråga — inget facit.