Marcus Berg, 2008-08-14

Tentamen, Kvantfysikens principer, FK2003, 7,5hp

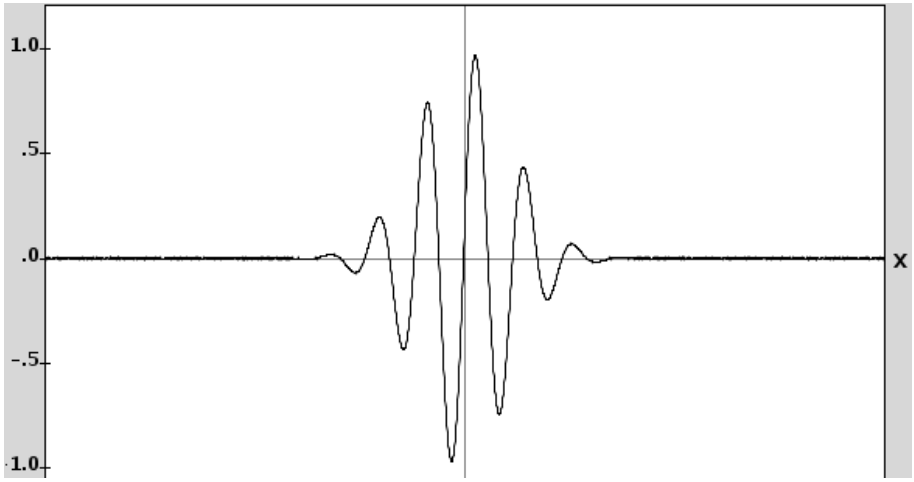
Tid: 9.00-14.00(15.00), lördag 23/8 2008
Hjälpmedel: utdelad formelsamling, miniräknare (inte Physics Handbook eller Mathematics Handbook!)

Var noga med att tydligt redovisa uträkningar och att ge tydliga men kortfattade motiveringar till alla svar.

Maxpoäng är 32p. Betyg sätts utifrån kursens betygskriterier. Lycka till! MB

---

1. Betrakta ett vanligt klassiskt vågtåg med längden 1 mm, dvs. osäkerheten i "var vågtåget är" är ungefär $\Delta x \approx 0,5$ mm. Vågtåget har $n = 5 \pm 1$ hela oscillationer, dvs. det har ungefär 5 våglängder med osäkerheten $\Delta n = \pm 1$.



a) Vad är osäkerheten i vågtalet Δk? Ledning: $k = 2\pi/\lambda$. (2p)
b) Vad är $\Delta x \Delta k$? Vad händer med Δk för ett vågtåg som ser mer "ihoptryckt" ut ($\Delta x \to 0$) *utan* att ändra våglängden som du ser i figuren? (Ledning: måste vi ta med fler eller färre vågor av olika vågtal k som bygger upp vågtåget?) (1p)
c) Osäkerheterna Δx och Δk i a) och b) ser ut som om de uppfyller någon slags "obestämdhetsrelation", men vågtåget ovan är alltså en *klassisk våg*, t.ex. en ljudvåg. I vilken bemärkelse är relationen $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ annorlunda, och speciell för kvantfysik? Förklara kortfattat. (2p)
d) Mätonoggrannheten i ett experiment är $\delta x = 1$ nm, $\delta p = 10^{-20}$ kgm/s. Kommer vi att kunna se några effekter av den kvantfysiska obestämdhetsrelationen? (2p)

2. Tag ett tvåtillståndssystem med tillstånden $|+\rangle$ och $|-\rangle$. En apparat A beskrivs av talen $\langle +|A|+\rangle = 1/\sqrt{2}$, $\langle +|A|-\rangle = 1/2$, $\langle -|A|+\rangle = 1/2$, $\langle -|A|-\rangle = 1/2$.

a) Vad är sannolikheten att efter apparaten mäta partiklar i "$-$"-tillståndet om man

skickar in partiklar i "+"-tillståndet? (1p)
b) Om man skickar in opolariserade partiklar i apparaten A, hur stor bråkdel av partiklarna förlorar man? (2p)

En apparat B beskrivs av talen $\langle +|B|+\rangle = 1/2$, $\langle +|B|-\rangle = i/2$, $\langle -|B|+\rangle = -i/2$, $\langle -|B|-\rangle = 1/2$.

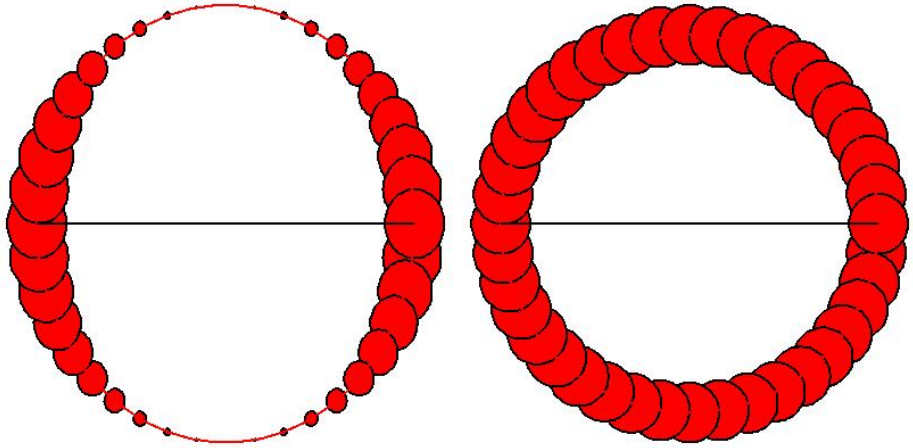
c) Om man skickar in opolariserade partiklar i apparaten B, hur stor bråkdel av partiklarna förlorar man? (2p)
d) Om man skickar in opolariserade partiklar i apparaten AB, hur stor bråkdel av partiklarna förlorar man? (1p)

3 . Betrakta vågfunktionen för det sfäriskt symmetriska stationära tillståndet $n = 2$ i väteatomen: $\psi_2(\mathbf{r}) = R_2(r)$, där $r = |\mathbf{r}|$ är radien,

$$R_2(r) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} a_0^{-3/2} e^{-r/(2a_0)} (1 - \frac{r}{2a_0})$$

och $a_0 = 5,3$ nm är Bohrradien. Vågfunktionen är korrekt normerad.
a) Vilken enhet har $P = |\psi_2(\mathbf{r})|^2$? Varför är det rimligt? (1p)
b) Var är maximum för P ? (1p)
c) Hur stor är sannolikheten att vid en mätning av elektronens läge finna den i ett tunt sfäriskt skal med radie r och tjocklek δr? (1p)
d) Vad är sannolikheten att hitta elektronen i ett $0,1$ nm tjockt skal med radie lika med P:s maximum? (Ledning: notera att P kan approximeras som konstant över ett så tunt skal.) (1p)

4. Vi utför ett spridningsexperiment med två olika typer av partiklar P och Q, som vi inte vet om de är bosoner eller fermioner, men vi vet att *amplituden* att sprida dem en given vinkel θ är $A(\theta)$, samma i bägge fallen. Vi skjuter två partiklar av sorten P mot varandra många gånger och sätter en flyttbar detektor vid vinkeln θ. Vi ritar en stor cirkel vid vinkel θ om vi får många partiklar vid den vinkeln, och en liten cirkel om vi får få partiklar, och ingen cirkel om vi inte får några alls. När vi är klara med det diagrammet gör vi samma sak för två partiklar Q. Vi får följande resultat, där partiklarna kom in horisontellt (i masscentrumssystemet)



a) Partiklarna P vars spridning gav upphov till diagrammet till vänster, är de bosoner eller fermioner? Motivera. (2p)
b) Partiklarna Q vars spridning gav upphov till diagrammet till höger, är de bosoner eller fermioner? Motivera. (2p)
c) Om du bara får se diagrammet till vänster och inte vet något om amplituden $A(\theta)$, kan du då direkt säga om partiklarna är bosoner eller fermioner? (1p)

5. Betrakta ammoniakmolekyltillståndet

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\cos\left(\frac{At}{\hbar}\right)|1\rangle + i\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right)|2\rangle\right)$$

och som vanligt $|I\rangle = (1/\sqrt{2})(|1\rangle - |2\rangle)$, $|II\rangle = (1/\sqrt{2})(|1\rangle + |2\rangle)$. Antag $E_0 = 10^{-2}$ eV och $A = 10^{-4}$ eV. Tillståndet $|I\rangle$ har energin $E_0 + A = 0,0101$ eV, tillståndet $|II\rangle$ har energin $E_0 - A = 0,0099$ eV. Antag att vi har väldigt bra experimentutrustning med mätonoggrannhet mycket mindre än skillnaden mellan de två energierna.

a) Vad är sannolikheten att uppmäta tillståndet $|1\rangle$ efter $t = 10^{-11}$ sekunder? (1p)
b) Vad är sannolikheten att uppmäta energin $0,0101$ eV efter $t = 10^{-11}$ sekunder? (1p)
c) Vad betyder det att det är en viss "sannolikhet" att mäta $0,0101$ eV eller $0,0099$ eV när vi har så bra mätutrustning? Om vi mäter energin, borde vi inte alltid få ett bestämt värde? (2p)
d) Beskriv vad experimentet ger för resultat i den *klassiska gränsen* $A \ll E_0$ (dvs. A minskar från värdet ovan) och hur det skiljer sig från resultaten i den kvantmekaniska världen. (2p)

6. I kurslitteraturen (Feynman) har ni läst om svartkroppsstrålning. Historiskt var kvantfysik avgörande för att förstå strålningsspektrat hos en svart kropp för höga frekvenser. Föreställ er en låda med atomer som har två tillstånd, grundtillstånd och exciterat tillstånd, skilda av en energi ΔE. En atom i grundtillståndet kan absorbera en foton med energi $\Delta E = \hbar\omega$ och bli exciterad, eller så kan en exciterad atom skicka ut en foton med energi $\Delta E = \hbar\omega$ och gå tillbaka till grundtillståndet. N_g är medelantalet atomer i grundtillståndet, och N_e medelantalet i det exciterade tillståndet. Givet är

$$\frac{N_e}{N_g} = e^{-\beta\cdot\Delta E}$$

där β är en konstant. Givet är också att absorptionshastigheten från ett tillstånd med frekvens ω är proportionell mot $N_g\bar{n}$, där $\bar{n}$ är medelantalet fotoner i tillståndet med frekvens ω.

a) Vad är *emissionshastigheten* till ett givet fotontillstånd med frekvens ω proportionell mot? (Ledning: hur beror fotoners tendens att gå in i ett tillstånd på hur många som redan är i tillståndet?) Välj ett svar: 1) $N_e/\bar{n}$ 2) $N_e/(\bar{n}+1)$ 3) $N_e\bar{n}$ 4) $N_e(\bar{n}+1)$ men för poäng krävs förklaring varför du valde det du gjorde. (2p)
b) I jämvikt måste vi ha absorptionshastighet = emissionshastighet. Använd det för att hitta $\bar{n}$ uttryckt i ω, och därigenom medelenergin $E_{\text{medel}} = \bar{n}\cdot\hbar\omega$. Vad går medelenergin mot i högfrekvensgränsen $\omega \to \infty$? (2p)