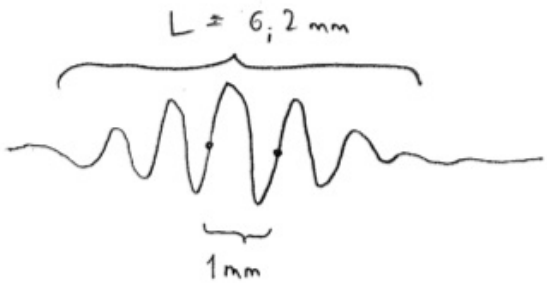
Marcus Berg, 2008-06-06

Kvantfysikens principer, FK2003, Konceptfrågor v.1.4

Instruktioner: Det här är konceptfrågor jag frågade på kursen. Enda skillnaden mellan det här och samma frågor i föreläsningsanteckningarna är att det står lite förklarat om svaret här. Se det här som instuderingsfrågor som kompletterar de enklare frågorna i kompendiet.

---

1. Vi har ett vågpaket ("vågtåg") som ser ut så här:



Vad är obestämdheten i k, dvs. vad är Δk? Ledning: Om n är antalet vågor (dvs. antalet våglängder λ) i vågpaketet med längden L mm har vi

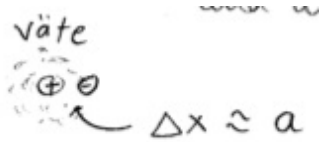
$$n = \frac{L}{\lambda} = \frac{L}{2\pi/k} = \frac{kL}{2\pi} \ . \tag{1}$$

A) 1 mm^{-1}
B) 6 mm^{-1}
C) 12π mm^{-1}

Svar: A. Vi ser att det är 4-5 vågor i paketet. (Prickarna räknar "en våg", dvs. en approximativ våglängd.) Osäkerheten i antalet vågor Δn är alltså runt ± 1. Från (1) har vi $k = 2\pi n/L$, dvs.

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta n}{L} \approx 1 \text{ mm}^{-1} \tag{2}$$

2. Räkna ut väteatomens storlek. Börja från $p = \hbar k$, vågtalet $k = 2\pi/\lambda$ ger $p = h/\lambda$ (minns att $\hbar = h/2\pi$). Vi säger att elektronens våglängd grovt räknat ger "storleken" a hos elektronmolnet:



Rörelseenergi:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2ma^2} \tag{3}$$

Potentiell energi från elektrisk attraktion (Coulombkraft): $-ke^2/a$ i SI-enheter, där $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. [1] Total energi:

$$E_{\text{tot}} = \frac{h^2}{2ma^2} - \frac{ke^2}{a} \tag{4}$$

Vid vilket värde av a är konfigurationen proton-elektron stabil enligt den här väldigt enkla modellen? Vad är svagheter med modellen?

A) $\dfrac{h^2}{kme^2}$

B) $\dfrac{ke}{mh^2}$

C) ke^2mh

Svar. A.

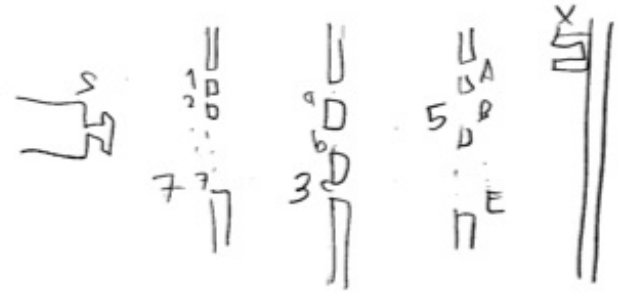
$$\frac{dE_{\text{tot}}}{da} = -2\frac{h^2}{2ma^3} + \frac{ke^2}{a^2} \stackrel{!}{=} 0 \tag{5}$$

Minimum i $a = a_{\text{min}}$, där $dE_{\text{tot}}/da = 0$,

$$a_{\text{min}} = \frac{h^2}{kme^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2} = 4\pi^2 \cdot a_{\text{Bohr}} \tag{6}$$

där a_{Bohr} är den s.k. Bohrradien, cirka en halv Å, eller 0,05 nm. Väteatomen observeras vara storleksordningen 1 Å. Värdet vi fick är inte speciellt exakt men missar bara med en storleksordning. Vi har t.ex. använt rörelseenergin för en fri partikel men som vi lär oss senare i kursen är elektronen i ett bundet tillstånd. Å andra sidan är svaret rätt bra för en så enkel modell.

3. Vi har följande experimentuppställning: en elektronkanon, en skärm med 7 hål, en skärm med 3 hål och en skärm med 5 hål.



[1] Feynman använder en föregångare till SI där e är mätt i enheter av $\sqrt{4\pi\epsilon_0}$ Coulomb, så man har "absorberat" k i e^2, det står alltså inget explicit k. (Man skall vara medveten om att det finns olika enhetssystem — och att det finns konversionstabeller som den i kompendiet s. 8. Jämför fråga **8a** och **8b**.)

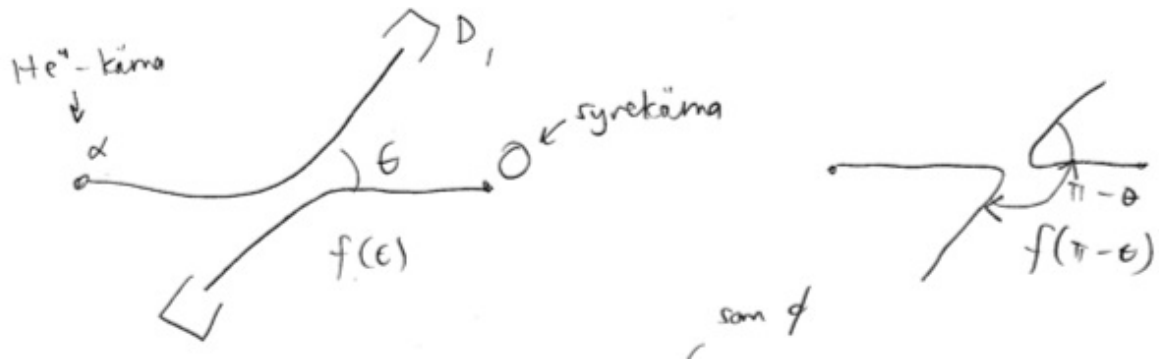
Hur många termer har amplituden $\langle x|s\rangle$?
A) $7! \cdot 3! \cdot 5! = 3\ 628\ 800$
B) $7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$
C) $7 + 3 + 5 = 15$

Svar: B.

$$\langle x|s\rangle = \sum_{\substack{i = 1..7 \\ \alpha = a, b, c \\ \gamma = A, \ldots E}} \langle x|\gamma\rangle\langle\gamma|\alpha\rangle\langle\alpha|i\rangle\langle i|s\rangle \tag{7}$$

Antal termer i summan: $7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$.

4a. Spridningsexperiment med α-partiklar och syrekärnor:



Vi kallar den första amplituden $f(\theta)$. Vad är sannolikhets-*tätheten* att mäta *någon* partikel i detektor D_1? Hur får vi en riktig sannolikhet? (Påminnelse: Amplituden för den högra processen ges egentligen av $f(\pi + \theta)$ eftersom θ mäts motsols. Men som det är skrivet i figuren antar vi att $f(\pi + \theta)$ är lika med $f(\pi - \theta)$.)

Sannolikhetstätheten är
A) $|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$
B) $|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$
C) $|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$

Svar: B. Partiklarna är olika, så amplituderna för "direkt"-spridning[2] (den till vänster) och "utbytes"-spridning (den till höger) interfererar inte, så alternativ A och C är bägge fel.

För att få sannolikheten multiplicerar vi sannolikhetstätheten med detektorns vinkelutsträckning $\Delta\theta$. Den var inte given i det här problemet. (Sannolikheten att mäta partikeln *exakt* i t.ex $\theta = 15,0000....^\circ$ är om man skall vara petig exakt noll, men en verklig detektor har en bredd $\Delta\theta$).

[2]Notera att vi har definierat "direkt" så att $\theta < \pi$.

4b. Byt ut syrekärnorna mot α-partiklar. Sannolikhetstätheten är
A) $|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$
B) $|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2$
C) $|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2$

Svar: A. Partiklarna är identiska, så amplituderna för "direkt" (den till vänster) och "utbyte" (den till höger) interfererar, så alternativ B är fel. Vi kan testa att C är fel genom att sätta detektorn i $\theta = \pi/2$ (så att de två detektorerna är ekvivalenta, för vi får rotera runt axeln som går utefter de ursprungliga partiklarna.) Vi har nu identiska bosoner, så det är inget problem att ha dem i samma tillstånd. Men C ger $|f(\pi/2) - f(\pi/2)|^2 = 0$, oavsett hur funktionen $f(\theta)$ ser ut. Det svaret gäller för fermioner, så det måste vara fel i den här frågan.

Man skall inte tolka de utritade banorna i figuren ovan för bokstavligt. När partiklarna är så nära att de påverkar varandra, dvs. när de börjar avvika från att flyga rakt fram, kan det också (beroende på experimentdetaljer, t.ex. energin vi skjuter in dem med) vara viktigt att se partiklarna som vågfunktioner och inte små bollar, så att man egentligen borde rita ett litet "moln" i mitten. Om vi verkligen skulle *mäta* banorna så vi visste att de ser ut exakt som i figuren, dvs. sätta ut små detektorer efter hela vägen, skulle vi *aldrig* få någon interferens mellan direktspridning och utbytesspridning (jfr. dubbelspaltexperiment med blixt)! Poängen att skissa banorna är bara att hålla reda på vilken partikel som hamnar var, inte att säga att vi vet att trajektoriet såg ut precis så.

5. Litiumatomen har tre protoner, tre elektroner och ser ut ungefär såhär:[3]

Alltså två elektroner i första skalet ("$n = 1$-skalet", jämför våra bundna-tillstånds-lösningar av Schrödingerekvationen på slutet av kursen, som hade diskreta energier E_n numrerade med ett heltal n) och en i ett nytt skal ("$n = 2$-skalet"). Vi vet att den tredje elektronen hamnar i ett nytt skal eftersom elektroner är fermioner och inte kan vara i samma tillstånd. (De första två kan bara vara i samma tillstånd eftersom det finns två spinn-tillstånd.) Så långt allt väl.

Men varför kan vi inte helt enkelt ha den tredje elektronen (t.ex. spinn upp) någon *annanstans* i det första skalet, dvs. inte exakt *ovanpå* de andra två utan kanske nere till vänster i elektronmolnet? Med andra ord, borde inte elektronerna räknas som "olika tillstånd" om de

[3]Litiums atomkärna har inte bara tre protoner utan också fyra *neutroner* i den mest vanligt förekommande isotopen, men det är inte viktigt för vår grovkorniga abstraktionsnivå där atomkärnans enda viktiga egenskap är att den har elektrisk laddning.

har olika position?

A) Varje elektron kan uppmätas i "hela molnet", de är inte vid någon speciell position.
B) Spinnet är bevarat så vi kan inte lägga till ett upp-spinn i samma moln.
C) Att ha det så är ekvivalent med bilden ovan.

Svar. A.

Största svårigheten med den här frågan är för många att förstå formuleringen. Så är det med nästan alla *riktiga* frågor om fysik, trots att vi på kurser ibland ger det missvisande intrycket att alla frågor man stöter på automatiskt är precist formulerade, som i matematik. Låt oss försöka reda ut det här. Som vi lärde oss senare beskrivs varje elektron som en vågfunktion, vars absolutbelopp är det vi ritar som ett "sannolikhetsmoln" för varje elektronskal. Vi har bara visst många energi-tillstånd[4], och det är de tillstånden som det bara kan vara två elektroner i, en spinn upp och en spinn ned. Men frågan är inte helt dum; en elektron som mäts att vara vid positionen x_1 *är faktiskt* i ett annat tillstånd (man kan säga ett annat "klassiskt tillstånd" för att vara noga) än en som är någon annanstans x_2, det är bara det att före mätningen (i "kvanttillståndet") är elektronen inte vid någon speciell position alls utan befinner sig i ett bundet tillstånd som är en superposition av elektroner vid olika lägen. Alternativ A stämmer alltså om man tolkar det som "...de är inte vid någon speciell position *innan man mäter dem*".

Att lägga den tredje elektronen i samma skal är inte ekvivalent med den korrekta bilden av litium eftersom litium då inte skulle ha någon valenselektron och vara svårare att jonisera än helium, vilket inte är fallet. C är alltså fel.

B är bara för att luras: spinnets bevarande är relevant i *dynamiska* situationer, som i neutronspridning mot kristall, inte i statiska frågor som hur atomkärnor är uppbyggda, så det finns ingen bemärkelse som det är förbjudet att lägga till något visst spinn a priori. (Vore det förbjudet skulle redan vår diskussion om heliumatomen vara i fara, då vi lade till t.ex. ett spinn ned när vi redan hade ett spinn upp i väteatomen.)

6. Tag spridningsexperiment som i **4** ovan, fast nu med identiska fermioner 1 och 2. Här är en tabell över resultaten:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & D_1 & D_2 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow \\ \uparrow & \downarrow & \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ \downarrow & \uparrow & \downarrow & \uparrow \end{array} \qquad \begin{array}{c} P \\ |f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2 \\ ? \\ |f(\theta)|^2 \\ |f(\pi-\theta)|^2 \\ ? \\ ? \end{array} \tag{8}$$

Vad skall stå i frågetecknen?

A) $|f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2$, $|f(\theta)|^2$, $|f(\pi-\theta)|^2$
B) $|f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2$, $|f(\pi-\theta)|^2$, $|f(\theta)|^2$

[4]senare tänkte vi oss den elektrostatiska potentialen som en potentialgrop och löste Schrödingerekvationen för att få ut de stationära tillstånden, som har bestämd energi E_n, alltså "energi-tillstånd".

C) $|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2$, $|f(\pi - \theta)|^2$, $|f(\pi - \theta)|^2$

Svar: B. Se Feynman tab. 3-1 (s.3-12). Ett kraftfullt argument är att använda den *totala* symmetrin mellan $\uparrow$ och $\downarrow$. [5] Man får t.ex. 5:e raden från 4:e genom att byta alla spinn, så de svaren måste vara identiska. Med "totala symmetrin" menas att man måste byta *alla* spinn för att få något som är oskiljaktigt från konfigurationen före bytet. Byter man bara t.ex. ett spinn har vi en annan fysikalisk situation, då måste vi tänka hårdare för att veta vad svaret skall bli; man får t.ex. inte 5:e raden från 3:e på det sättet. Som du ser räcker det här argumentet för att bestämma alla tre frågetecknen. Det finns också andra sätt att argumentera.

7. Betrakta Stern-Gerlach-apparaten

$$\begin{array}{cc} \left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\} \\ S & T \end{array} \tag{9}$$

som representeras av

$$\langle +T| + S\rangle + \langle 0T| + S\rangle + \langle -T| + S\rangle \tag{10}$$

i Diracnotation. Vi har ett normeringsvillkor

$$|\langle +T| + S\rangle|^2 + |\langle 0T| + S\rangle|^2 + |\langle -T| + S\rangle|^2 = 1 \tag{11}$$

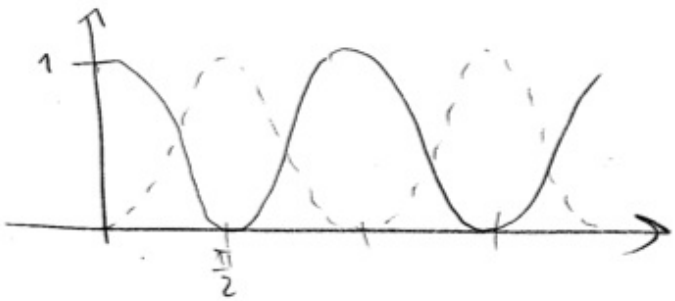
Vad betyder normeringsvillkoret fysikaliskt?

A) Det finns en "bevaringslag" (som för energi) för sannolikhet
B) man "tappar inte bort" partiklar i T-apparaten
C) Har man en komplett bas får man ingen interferens

Svar: A och B. De är komplementära sätt att säga samma sak; man kan säga att vi definierar A så att det betyder B. C är fel: vi jobbar alltid med kompletta baser, men vi får ofta interferens.

8a. Ammoniakmolekylen. Vi preparerar molekylen i tillståndet $|1\rangle$. (se Feynman fig. 8-1.) Schrödingerekvationen gav differentialekvationerna för $C_1(t)$ och $C_2(t)$. Genom att lösa dem får vi $C_1(t)$ och $C_2(t)$ som explicita funktioner, och därmed att sannolikheterna P_1 och P_2 utvecklar sig såhär med tiden (heldragen kurva = P_1, streckad = P_2):

[5] Det finns inte *alltid* en sådan symmetri, utan den finns bara för att vi i de här spridningsexperimenten har *valt* att inte ha t.ex. några pålagda magnetfält som böjer av partiklar med olika spinn åt olika håll. Vi har sett exempel på det i Stern-Gerlach-experimentet.



Tiden t på horisontella axeln är i enheter $\hbar/A$. [6]. Jag mäter tillståndet vid $t = \pi/2$. Vad är sant?

A) Jag mäter en superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$.
B) Jag hittar energin $E_0 + A$ hälften av gångerna, och jag hittar energin $E_0 - A$ hälften av gångerna.
C) Jag hittar alltid E_0.

Svar: B. Vi mäter *aldrig* superpositioner, så A är fel. Vi mäter *aldrig* energin E_0 i det här systemet, bara $E_0 + A$ och $E_0 - A$, så B är också fel. (Jämför uppgift **11** om klassisk gräns nedan.) Då kan antingen B eller ingen vara rätt. Det tidsberoende tillståndet $|\psi(t)\rangle$ är (jfr. t.ex. föreläsning 8, 20/5)

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\cos\left(\frac{At}{\hbar}\right)|1\rangle + i\sin\left(\frac{At}{\hbar}\right)|2\rangle\right) \tag{12}$$

Vid $t = \pi/2$ i enheterna $\hbar/A$ har vi i vanliga enheter $t = \pi/2 \cdot (\hbar/A)$, vilket ger $C_1(t) \propto \cos(At/\hbar) = \cos\pi/2 = 0$. Som vi också ser i grafen mäter vi vid precis den tidpunkten tillstånd $|2\rangle$ med 100% säkerhet, så det verkar rätt. Vi har nu[7]

$$|\psi(t = \pi/2)\rangle = |2\rangle C_2(\pi/2) \tag{13}$$

och $C_2(\pi/2) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t} \cdot 1$, därför

$$|\langle I|\psi(t = \pi/2)\rangle|^2 = |\langle I|2\rangle C_2(\pi/2)|^2 = \left|\frac{C_2(\pi/2)}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \tag{14}$$

och liknande för $|II\rangle$. Alltså stämmer B. Vi hade också kunnat försöka argumentera mer direkt: om vi är säkra på att ha tillstånd $|2\rangle$, vilket vi nästan[8] är om vi mäter vid $t = \pi/2$, så är det "uppbyggt av lika mängder" $|I\rangle$ och $|II\rangle$, så vi mäter de två lika ofta. Men den typen av

[6]Det kan vara lätt att bli förvirrad av det här vid första anblick. Det betyder bara, som vi ser i svaret, att om vi ser $t = \pi/2$ i enheterna i figuren skall vi stoppa in $t = \pi/2 \cdot (\hbar/A)$ i formeln, dvs $At/\hbar = \pi/2$. En fördel är förstås att det går snabbare att skriva $t = \pi/2$. Men för att få en känsla för tidsförloppen: vad är det i SI-enheter? För ammoniakmolekylen har vi $A \approx 10^{-4}$ eV (Feynman s. 9-2), så $\hbar/A \approx 10^{-34}$ Js/$(10^{-4} \cdot 10^{-19}$ J$) = 10^{-11}$ s .

[7]eftersom $C_2(\pi/2)$ är ett tal och inte t.ex. en matris, så kan vi skriva det antingen till höger eller till vänster om tillståndet $|2\rangle$, det spelar ingen roll.

[8]Skall man vara noga kan vi aldrig mäta *exakt* vid $t = \pi/2$, så vi har aldrig *exakt* 100% chans att mäta tillstånd $|2\rangle$ i en fysikalisk situation med ändlig mätnoggrannhet i tidsbestämningen, men vi kan komma nära.

"klassiska" argument gäller inte alltid. Vi kan inte alltid tänka så när vi har interferens.

8b. Samma som fråga 8a, men vi mäter tillståndet vid $t = \pi/4$. Vad är sant?

A) Jag mäter en superposition $\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle$.
B) Jag hittar energin $E_0 + A$ hälften av gångerna, och jag hittar energin $E_0 - A$ hälften av gångerna.
C) Jag mäter alltid E_0.

Svar: Fortfarande stämmer varken A eller C, men stämmer B nu? Vi kan se från sannolikheterna i figuren att vi vid $t = \pi/4$ har "hälften av varje" av $|1\rangle$ och $|2\rangle$. De har i sin tur *båda två* "hälften av varje" av $|I\rangle$ och $|II\rangle$. Betyder det att B återigen stämmer, enligt det förenklade argumentet i förra svaret? För att se det kan vi gå tillbaka till $|\psi(t)\rangle$ och notera att om vi stoppar in $t = \pi/4 \cdot (\hbar/A)$ får vi t.ex. $\cos(At/\hbar) = \cos\pi/4 = 1/\sqrt{2}$, så vi har (det här är det mest "direkta" sättet att räkna ut det på – det finns andra)

$$|\psi(t = \pi/4)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle\right) \tag{15}$$

så nu har vi

$$|\langle I|\psi(t)\rangle|^2 = \left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle I|1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}\langle I|2\rangle\right)\right|^2 = 1 \cdot \left|(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})\right|^2 = \frac{1}{2}$$

eftersom $\langle I|1\rangle = +1/\sqrt{2}$, $\langle I|2\rangle = -1/\sqrt{2}$ och $|a + ib|^2 = (a + ib)(a + ib)^* = a^2 + b^2$ för reella tal a och b. Å andra sidan

$$|\langle II|\psi(t)\rangle|^2 = \left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle II|1\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}\langle II|2\rangle\right)\right|^2 = 1 \cdot \left|(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})\right|^2 = \frac{1}{2}$$

så vi mäter antingen energin hos $|I\rangle$ eller den hos $|II\rangle$ med 50% chans vardera. Alltså stämmer B fortfarande. Men vi ser att när vi har flera termer kan vi ha interferens. Vi kan inte alltid säga "hälften av det" osv. för plötsligt får vi noll, som i fråga **13** nedan.

Man kan också räkna ut det en gång för alla, för alla t, och får samma svar.

Kommentar: när jag ställde den här frågan hade vi inte gått igenom $|I\rangle$ och $|II\rangle$ än. Ni kunde alltså inte göra räkningen ovan när frågan ställdes, utan jag använde det för att leda in till diskussionen om energimätningar. Nu i efterhand kan jag förklara det så här som ovan.

9. Om jag börjar med $|I\rangle$, vad mäter jag vid $t = \pi/4$?

A) $(E_0 + A) - (E_0 - A) = 2A$
B) E_0 i medeltal
C) Alltid $E_0 + A$ (oavsett t).

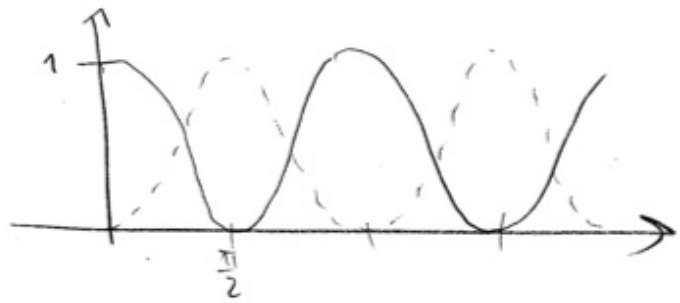
Svar: C. Vi vet nu att $|I\rangle$ är ett stationärt tillstånd, så vi mäter alltid samma energi $E_0 + A$. A och B är fel för vi kan *i allmänhet* (dvs. inte bara för det här exemplet när vi börjar med ett visst tillstånd) bara mäta $E_0 + A$ och $E_0 - A$ i ammoniakmolekylen i vår approximation, inget annat.

10. Betrakta det stationära tillståndet $|I\rangle$. Vad är sant?

A) $|I\rangle$ är tidsoberoende.
B) P_I (sannolikheten att mäta $|I\rangle$) är tidsoberoende
C) Många mätningar på $|I\rangle$ ger energi E_0 i medeltal

Svar: B. De stationära tillstånden är inte tidsoberoende, men sannolikheten är det. Vi mäter alltid $E_0 + A$ för $|I\rangle$, så medeltalet är $E_0 + A$. Så C är fel.

11. Klassisk gräns: Betrakta $E_0 \gg A$, t.ex. $E_0 \approx 100$ eV och $A \approx 1$ eV. Gör *approximationen att vi helt försummar A jämfört med E_0*. Det kallas den klassiska gränsen (av ett kvantfysiskt system). Varför energin A är en speciellt kvantfysisk effekt i ammoniakmolekylen förklarar Feynman på s. 8-12. Det är nämligen energin associerad med tunnling mellan tillstånden "ammoniak upp" och "ammoniak ned". Argumentera utifrån den kända grafen som gäller innan vi gjort approximationen:



Vad är sant i den klassiska gränsen?

A) $|1\rangle$ och $|2\rangle$ är approximativt tidsoberoende
B) P_1 och P_2 är approximativt tidsoberoende
C) Vi mäter praktiskt taget bara energin E_0 i den approximationen.

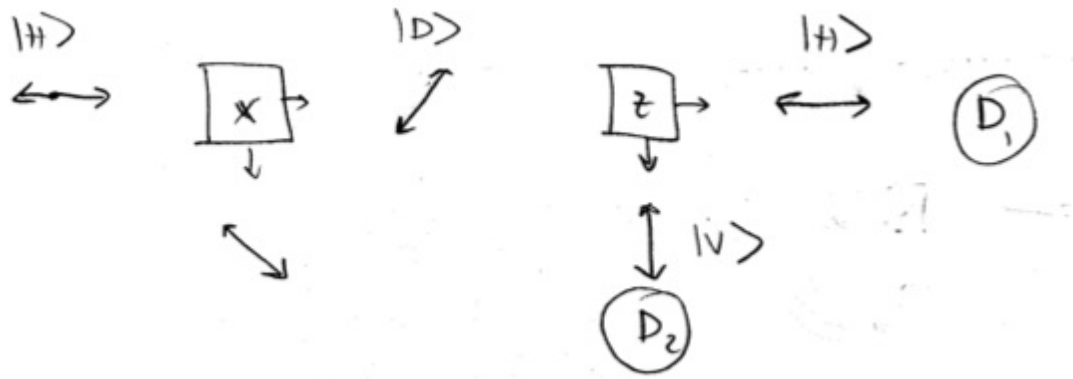
Svar: B och C.

Vi fortsätter alltid att ha tidsberoende tillstånd $|\psi(t)\rangle$, men svar A är elakt formulerat: vi har definierat *bastillstånden* så att de alltid är *exakt* tidsoberoende, det är koefficienterna C_1 och C_2 som tidsutvecklas. A är alltså fel på en teknikalitet. Svar B är sant: sätt $E_0 + A \approx E_0$ och $E_0 - A \approx E_0$ i uttrycket för $|\psi(t)\rangle$ och det ser ut som ett stationärt tillstånd med energi E_0! Då är sannolikheterna konstanta. Börjar vi med tillstånd $|1\rangle$ ("ammoniak upp") stannar vi för alltid i tillstånd $|1\rangle$, i den klassiska gränsen. Det betyder att sannolikheten att tunnla mellan "ammoniak upp" och "ammoniak ned" är försumbar i den klassiska gränsen. Det passar in med vad vi redan visste: i ett klassiskt system har vi ingen tunnling. Partiklar får inte vara i "klassiskt förbjudna områden" i klassisk fysik (det låter ju logiskt).

Mer i detalj: huruvida vi praktiskt kan skilja $|1\rangle$ och $|2\rangle$ åt beror på hur vi mäter upp och ned. Det mest praktiska sättet är via det elektriska dipolmomentet μ i ett elektriskt fält $\mathcal{E}$ (Feynman fig. 9-1) då energierna blir olika för upp och ner därför att det kommer ett energitillskott $\mu\mathcal{E}$, då kan man skilja dem åt oavsett om $A = 0$. Men det stod inget om elektriskt fält i uppgiften.

Vi ser att när $E_0 \gg A$ är energierna $E_0 + A$ och $E_0 - A$ *praktiskt* oskiljaktiga. (Till skillnad från oskiljaktiga i princip, dvs. om man går tillbaka och förbättrar mätnoggrannheten.) I den bemärkelsen mäter vi alltid E_0 i praktiken när $E_0 \gg A$, och vi ser isåfall aldrig den lilla kvanteffekten A som har "delat upp" energinivåerna i två. Därför kallas uppdelningen i $E_0 + A$ och $E_0 - A$ via en kvanteffekt A ibland "finstruktur".

12a. Vi gör Stern-Gerlach med fotoner, som i KiKo-kvantlabbet. Vi har en apparat orienterad i x-riktningen, och en i z-riktningen.



Antag att den antidiagonalpolariserade strålen som går nedåt i bilden från x mäts. (Vi bryr oss inte om vad svaret blir, men någon mäter de fotonerna.) Notera att det här exemplet är annorlunda än Feynmans SG-apparat där han aldrig mäter dem som filtrerades bort.[9] Definiera P_2 som sannolikheten att få en foton i detektorn D_2.

Vad är sant?

A) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle + \langle -S| - T\rangle\langle -T| + S\rangle|^2$
B) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle|^2$
A) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle + \langle -S| + T\rangle\langle -T| + S\rangle|^2$

Svar: B. Vi har uteslutit fotonerna som går neråt i bilden från x så vi vet att vi har $|D\rangle$, dvs $|+T\rangle$, som går in i z-apparaten, om det går in något alls. Det blir alltså ingen interferens mellan $|D\rangle$ och $|\bar{D}\rangle$ här.

12b. Samma uppställning som i fråga 12a. Räkna ut P_2:

A) $P_2 = 0$
B) $P_2 = 1/2$
C) $P_2 = 1/4$

Svar: Vi har $\langle -S| + T\rangle = 1/\sqrt{2}$, $\langle +T| + S\rangle = 1/\sqrt{2}$. Stoppar vi in det i B-uttrycket ovan får vi

$$P_2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{4} \tag{16}$$

[9] Med andra ord, filtret är *inne i* apparaten i Feynmans SG-apparat; det vi gör i den här frågan är mer som att sätta en detektor vid ett av "stoppen" inne i Feynmans SG-apparat.

Inte konstigt: vi förlorade först hälften i x-apparaten sedan hälften i z-apparaten.

13a. Led tillbaka strålen som går ned från x-detektorn och led in den i z-apparaten. Nu får vi
A) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle + \langle -S| - T\rangle\langle -T| + S\rangle|^2$
B) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle|^2$
A) $P_2 = |\langle -S| + T\rangle\langle +T| + S\rangle + \langle -S| + T\rangle\langle -T| + S\rangle|^2$

Svar: A. Nu får vi interferens. Nu är det mer som Feynmans SG-apparater, en utan filter.

13b. Samma uppställning som i fråga 13a. Räkna ut P_2:

A) $P_2 = 0$
B) $P_2 = 1/2$
C) $P_2 = 1/4$

Svar: A. Interferensen är destruktiv:

$$P_2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0 \tag{17}$$

Det här är hopplöst att förstå om vi tänker oss fotonerna som små klassiska partiklar ("bollar").

14. Betrakta en stationär vågfunktion vars x-beroende del $\phi(x)$ har formen av en normalfördelning, $\phi(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}$ för en given konstant σ. På föreläsningen diskuterade vi den Fouriertransformerade funktionen[10] $\phi(p)$, vars absolutbelopp ger sannolikhetstätheten att mäta olika rörelsemängder p. Obestämdheten hos en sannolikhetstäthet som ser ut som en normalfördelning ges approximativt av dess bredd, konstanten σ för $\phi(x)$ och en annan konstant η för $\phi(p)$. Då kom vi fram till att bredden hos $\phi(x)$ gånger bredden av $\phi(p)$ var $\hbar/2$. Vad är sant?

A) Om vi försöker minska obestämdheten i x, ökar vi obestämdheten i p.
B) Vågfunktioner är alltid normalfördelningar.
C) Vi har stoppat in $\hbar$ i beräkningen, det kom inte ut "av sig självt".

Svar: A och C. Motexempel till B är t.ex. vågfunktionen $\psi(x,t) = a(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Man ser att A och C är sanna från att

$$\eta = \frac{c}{\sigma} \tag{18}$$

för någon konstant c, men vad proportionalitetskonstanten är måste vi stoppa in från obestämdhetsrelationen: eftersom $\Delta x \approx \sigma$, $\Delta p \approx \eta$ har vi

$$\Delta x \Delta p \approx \sigma\eta = \sigma\frac{c}{\sigma} = c \tag{19}$$

[10] Det kan vara lite förvirrande att använda samma beteckning ϕ för två olika funktioner, för ofta menar vi med en funktion ϕ en regel som associerar vissa tal ("på x-axeln") med vissa andra tal ("på y-axeln"). Så är det inte med Fouriertransformen $\phi(p)$ av $\phi(x)$, det är alltså t.ex. allmänhet inte så att om vi stoppar in argumentet 0 får vi samma värde från de två funktionerna, dvs. vi har $\phi(x=0) \neq \phi(p=0)$. Men argumentet x kontra p hjälper oss hålla reda på att det är två olika funktioner, och det är bra att ha kvar symbolen ϕ för att påminna oss att vi fått den ena från en viss transformation av den andra. Om du fortfarande tycker det är förvirrande, kalla dem $\phi(x)$ och $\widetilde{\phi}(p)$.

så vi ser för det första att A är sann, för det andra att

$$c \geq \frac{\hbar}{2} \tag{20}$$

enligt obestämdhetsrelationen $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. I synnerhet är det *möjligt* att välja $c = \hbar/2$, så vi ser att normalfördelningen $\phi(x) = e^{-x^2/(2\sigma)}$ är en "minimi-obestämdhets-vågfunktion" *förutsatt att* vi normerar p-vågfunktionens bredd η så att $\eta = \hbar/(2\sigma)$. Men då har vi *använt* obestämdhetsrelationen, dvs. fått ut $\hbar$ genom att stoppa in det. (I en riktig matematisk härledning får man ut nya relationer — men någon sådan finns inte för obestämdhetsrelationen, det är "bara" en experimentell observation, inte något vi kan härleda matematiskt idag.)[11]

15. Vilket/vilka fysikaliskt system är de förenklade ("bitvis konstanta") potentialerna vi har studerat (föreläsning 27/5, 29/5) relevanta för?

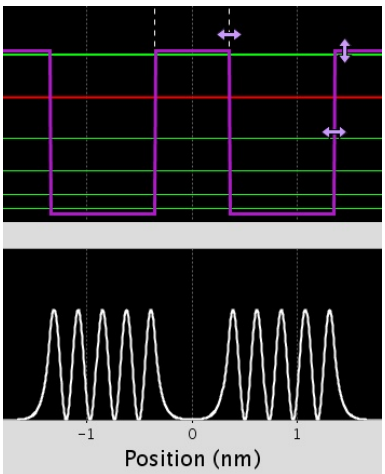
A) Väteatomen
B) Fri partikel
C) Inget

Svar: A och C. Väteatomen och alla atomer *har* bundna tillstånd, elektronskal, så grovt räknat ser vi något som stämmer överens med hur världen fungerar. Å andra sidan räknar vi i en dimension ($\psi(x)$, inte $\psi(x, y, z)$), och struntar i många andra detaljerade effekter (t.ex. elektronens spinn och ban-rörelsemängdsmoment), så vi kan inte hoppas kunna reproducera några detaljer av riktiga experiment med de här förenklade modellerna. Noga räknat stämmer det inte exakt överens med någonting. Men man måste börja någonstans! Att kunna reproducera kvalitativa egenskaper hos fysikaliska system som bundna tillstånds energikvantisering (som tog genier som Niels Bohr *årtionden* att förstå i början av 1900-talet!) med en uträkning som man går igenom på en halvtimme är ändå rätt så effektivt.

För en fri partikel är däremot $V = 0$, så det finns inga bundna tillstånd. (Det hör man nästan direkt från ordet "fri".). B är alltså fel, fel, fel.

[11] Tänker man matematiskt kan man få för sig att kalla obestämdhetsrelationen ett *axiom*, dvs. ett grundantagande som i sig inte kan härledas inom ett visst teoribygge. Det kan man göra, men man skall vara försiktig med vad man menar med det. I matematik använder man ofta deduktiv logik: börja med axiom, härled teorem (satser) och var nöjd med det. I fysik använder vi i slutändan alltid induktiv logik: stämmer teoriresultatet med det här experimentet? Om inte, kom på en bättre teori. Det betyder strängt taget att vi aldrig kan vara helt säkra på någonting, eftersom vi alltid har i bakhuvudet att *framtida* experiment kan visa att våra teoribyggen idag är otillräckliga för att beskriva verkligheten. Feynman poängterar flera gånger att vi inte har något oberoende teoribygge som *utesluter* att vi någon gång skulle kunna konstruera ett fysikaliskt system med $\Delta x \Delta p_x < \hbar/2$ (t.ex. s.1-9, s.1-11), det är bara det att ingen någonsin har gjort det. (Andra kvantmekanikböcker erkänner sällan att det är så.) "Axiom" ger för många fysikstudenter ett intryck av något som är *sant*, vilket har en positiv klang, men i logik är det inte något speciellt positivt med ett axiom, utan snarare tvärtom: inom själva teoribygget, här kvantmekanik, har man åtminstone tillfälligt givit upp idén att förklara varför naturen fungerar på det här sättet, så det är *bara* ett axiom, inte ett teorem. (En varning om du går fler kvantfysikkurser: det finns sätt att "härleda" obestämdhetsrelationen ur andra utsagor, men alla vedertagna "härledningar" uttrycker bara $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ i mer matematiskt språk (t.ex. $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$), vilket bara är en omskrivning, inte en förklaring varför relationen är *oundviklig* (t.ex. varför inte $\Delta x \Delta p_x \geq 100\hbar$?), vilket är vad som krävs av en riktig förklaring i fysik.) För att sammanfatta den här långrandiga fotnoten, jag kallar hellre obestämdhetsrelationen en "experimentell observation" än ett "axiom".

16. Betrakta en ändlig tvågropspotential $V(x)$ i en dimension. Vi vet att det här stationära tillståndet finns:



Den övre (lila, kantiga) kurvan är potentialen $V(x)$ och den undre (vita) kurvan är $P(x) = |\psi(x)|^2$ för det här speciella stationära tillståndet. Vad är sant fysikaliskt?

A) om vi sätter partikeln i grop 1, stannar den för alltid i grop 1.
B) Sannolikheten att mäta partikeln någonstans i "väggen" *mellan* groparna är exakt noll.
C) I de stationära tillstånden kan vi mäta partikeln ibland i grop 1 och ibland i grop 2.

Svar: C. Alternativ B är falskt eftersom vi har de "exponentiella svansarna" som "sticker in" i väggen mellan groparna (studera den vita kurvan $P(x) = |\psi(x)|^2$ och jämför med var väggen mellan groparna börjar i bilden ovanför). Sannolikheten är i och för sig liten där, men inte exakt noll. (Bara om väggen är oändligt hög är den exakt noll.) Alternativ A är lite lurigt: om vi sätter partikeln i grop 1 *kan vi inte ha* tillståndet vars P ges av den vita kurvan på bilden, för sannolikheten för den kurvan är uppenbarligen inte noll i grop 2. Situationen i alternativ A måste alltså beskrivas av ett annat tillstånd, och man kan visa (eller gissa från erfarenhet med ammoniakmolekylen) att det asymmetriska tillståndet "partikel bara i grop 1" inte är stationärt. Det visar sig att stationära tillstånd har någon symmetri mellan groparna, på samma sätt som en-elektrons-bindningen vi gick igenom (som i sin tur var analog med ammoniakmolekylen): de stationära tillstånden $|I\rangle$ och $|II\rangle$ i det fallet är *superpositioner* av $|1\rangle$ = "elektron i proton 1:s potentialgrop" och $|2\rangle$ = "elektron i proton 2:s potentialgrop". För att sammanfatta: sannolikhetstätheten stannar inte i grop 1 för evigt, och A är fel.

(Kommentar: på föreläsningen 2/6 visade jag i Java-animeringen att superpositionstillståndet $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{11}(x,t) + \psi_{12}(x,t))$ är isolerat i grop 1. Det är mycket riktigt icke-stationärt.)