Innehåll

1 INLEDNING 4

2 KURSLITTERATUR 7

3 ENHETER 8

4 VÅGOR 9
- 4.1 Vattenvågor - två experiment 9
- 4.2 Matematisk beskrivning av vågor 12
- 4.3 Superpositionsprincipen 16
- 4.4 Huygens princip 17
- 4.5 Dubbelspaltexperimentet - II 18
- 4.6 Diffraktion från ett hål - II 20
- 4.7 Upplösningsförmåga 21

5 FEYNMAN KAP. 1: Quantum Behavior 23

6 FEYNMAN KAP. 2: The Relation of Wave and Particle Viewpoints 26

7 FEYNMAN KAP. 3: Probability Amplitudes 29

8 FEYNMAN KAP. 4: Identical Particles 32

9 BOSONER, FERMIONER OCH SPINN 34
- 9.1 Identiska partiklar 34
- 9.2 Bosoner och fermioner 35
- 9.3 Spinn 37
- 9.4 Spridning och spinn 39

10 FEYNMAN KAP. 5: Spin One 40

11 FEYNMAN KAP. 8: The Hamiltonian Matrix 44

12 FEYNMAN KAP. 10: Other Two-State Systems 48

13 PARTIKLARS RÖRELSE (Feynman kap. 16) 49
13.1 Repetition av den kvantmekaniska formalismen 49
13.2 En partikels rörelse längs en linje 53
13.3 En partikels rörelse i rummet 61
13.4 Flera partiklar 62

14 VIT DVÄRG, NEUTRONSTJÄRNA OCH SVART HÅL 64
14.1 Vit dvärg 65
14.2 Neutronstjärna 65
14.3 Svart hål 66

15 VAD ÄR VIKTIGAST I KURSEN? 67

16 FORMELSAMLING 71

17 PROBLEM OCH FRÅGOR 73
17.1 Feynman kapitel 1 73
17.2 Feynman kapitel 2 77
17.3 Feynman kapitel 3 79
17.4 Feynman kapitel 4 84
17.5 Feynman kapitel 5 86
17.6 Feynman kapitel 8 90
17.7 Feynman kapitel 9 94
17.8 Kompendiet kapitel 13 (Feynman kapitel 16) 97

18 FACIT TILL PROBLEMEN 101
18.1 Svar på problemen till kapitel 1 101
18.2 Svar på problemen till kapitel 2 103
18.3 Svar på problemen till kapitel 3 103
18.4 Svar på problemen till kapitel 4 104
18.5 Svar på problemen till kapitel 5 106
18.6 Svar på problemen till kapitel 8 108
18.7 Svar på problemen till kapitel 9 110
18.8 Svar på problemen till kapitel 16 113

19 TENTOR 118
19.1 22 januari 1997 118
19.2 16 juni 1997 121
19.3 21 januari 1998 124

1 INLEDNING

Vi vill hälsa dig välkommen till Fysikum och kursen *Kvantfysikens principer.* Kvantmekaniken, teorin bakom kvantfysiken utvecklades på 1920-talet och är en av det mänskliga intellektets största triumfer. Den beskriver verkligheten på ett sätt som strider mot vårt sunda förnuft, men förklarar mängder av experiment och är därför utan tvekan riktig. I själva verket har aldrig någon avvikelse från kvantmekaniken observerats. (Därmed inte sagt att detta aldrig kommer att ske.) Avsikten med denna kurs är nu inte att du skall lära dig alla kvantmekanikens teknikaliteter, det vore knappast möjligt utan att först studera mer matematik, mekanik etc. Nej, istället är tanken (som kurstiteln antyder) att vi skall koncentrera oss på de grundläggande principerna. Det visar sig att detta låter sig göras utan att alltför mycket kunskaper i klassisk fysik och matematik krävs.

Kompendiet

Kompendiet består huvudsakligen av kommentarer och kompletteringar till kursboken samt av problem (med lösningar) och frågor.

Kursboken

Man kan komma långt i kvantfysiken utan att behöva avancerade kunskaper i matematik eller klassisk fysik om man börjar i rätt ände. Kursboken, del 3 av "The Feynman Lectures on Physics", gör detta. Det var i själva verket Richard Feynman som introducerade detta sätt att presentera kvantmekaniken. Kursboken är sista delen av en universitetskurs som täcker "hela" fysiken. (Vi kan varmt rekommendera de övriga delarna, tex som bredvidläsningslitteratur under dina senare kurser för dig som fortsätter läsa fysik.) Du kommer därför ibland att stöta på saker som kan vara svåra att förstå. Låt inte detta avskräcka dig! Det allra mesta kommer att vara begripligt, och resten skall vi försöka förklara på föreläsningarna.

Problem

Kursboken innehåller inga problem, dessa finner du istället i detta kompendium.

Tentamen

Tentamen kommer att bestå av problem och frågor av liknande slag som de som finns i detta kompendium. Det lönar sig alltså att arbeta med dessa!

Goda råd

Börja arbeta med kursen genast! Du klarar dig inte genom att läsa veckan före tentamen. Arbeta aktivt: läs boken, lös uppgifter, diskutera med kamrater, fråga lärare! Du lär dig inte främst genom att lyssna på föreläsningarna utan genom att själv arbeta.

Fysik kontra matematik

Fysik *är* inte matematik, däremot är matematik ett oumbärligt redskap i fysiken. Du kommer att märka att fysiken är fylld av argument och motiveringar som inte håller den stringens som du kanske är van vid från matematiken. Detta är helt i sin ordning och något som du måste vänja dig vid. En oerhört viktig del av fysiken är att göra approximationer, dvs att försumma oviktiga saker och komma fram till en (enkel) modell som innehåller det viktiga och som man kan analysera. Dessa approximationer måste naturligtvis motiveras och noga prövas, men det kan vara svårt att *bevisa* att en approximation är riktig.

Bredvidläsning

Du kommer antagligen att ha fullt upp med kurslitteraturen. Men låt oss i alla fall nämna ett par utomordentliga bredvidläsningsböcker. En är *QED* av Feynman, den ger en icke-teknisk, men korrekt, presentation av kvantelektrodynamiken som beskriver växelverkan mellan ljus och materia. Boken anknyter till vad vår kurs innehåller. En annan bok är *The Cosmic Code* av Pagels, som är en bredare översikt över fysiken.

Vi önskar dig lycka till med studierna och tackar Panagiotis Saltsidis för de fina figurer han gjort till detta kompendium! Vi vill också tacka David Liljequist och övriga tutorer för hjälp med kompendiet!

Stockholm, oktober 1997, augusti 1998 och september 1999

Rikard von Unge Anders Karlhede

September 2002

Ett antal fel och otydligheter upptäckta av Johan Grundberg har nu rättats till. Johan har även lyckats övertyga mig om att benämna Heisenbergs relation för obestämdhetsrelationen och ingenting annat. Tack Johan!

Anders Karlhede

3 ENHETER

Från gymnasiet är du van vid att använda SI enheter (m, kg, s, C, A ...). Även Feynman använder detta system (eller egentligen dess föregångare MKSA systemet). Men en del formler som innehåller elektronladdningen e ser lite ovanliga ut i Feynman. Detta beror på att Feynman med e^2 menar den vanliga elektronladdningen i kvadrat dividerad med konstanten $4\pi\epsilon_o$. För att få de vanliga SI-formlerna ska man alltså byta e^2 i Feynman mot $e^2/4\pi\epsilon_o$. ($\epsilon_o = 8,8544 \times 10^{-12}\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2}\mathrm{C}^2$ är den sk dielektricitetskonstanten för vakuum.) Vi kommer att stöta på följande formler som skiljer sig åt:

Potentiella energin i väteatomen

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{r} \qquad \text{(SI)} \tag{1}$$

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \qquad \text{(Feynman)} \tag{2}$$

Bohrradien

$$a_o = 4\pi\epsilon_o\frac{\hbar^2}{me^2} \qquad \text{(SI)} \tag{3}$$

$$a_o = \frac{\hbar^2}{me^2} \qquad \text{(Feynman)} \tag{4}$$

Väteatomens energinivåer

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{a_o}\frac{1}{2n^2} \qquad \text{(SI)} \tag{5}$$

$$E_n = -\frac{e^2}{a_o}\frac{1}{2n^2} \qquad \text{(Feynman)} \tag{6}$$

4 VÅGOR

Om en sten släpps i vattnet bildas vågor som rör sig ut från nedslagsplatsen. Likaså orsakar vinden vågor på vattnets yta. En violinsträng som vibrerar utför en vågrörelse, denna svängning ger upphov till ett ljud - en ton - som är en vågrörelse i luft bestående av förtätningar och förtunningar i luften.

Ljus är ännu ett exempel på vågor, i detta fall är det de elektriska och magnetiska fälten som svänger. Vi kommer i denna kurs att stöta på ännu en sorts vågor - kvantmekaniska vågor. Trots att vågor beskriver olika fysikaliska fenomen så har de gemensamma egenskaper och den matematiska beskrivningen av de olika vågorna är densamma. I detta kapitel ska vi ge de grunder om vågor du behöver för att följa denna kurs. Du har säkert stött på vågor i gymnasiets fysikkurs och vi rekommenderar att du tittar tillbaka i den lärobok du då använde.

4.1 Vattenvågor - två experiment

Vi skall här illustrera några viktiga vågbegrepp med enkla experiment med vattenvågor. Det är viktigt att komma ihåg att liknande resultat gäller för alla sorters vågor (vatten, ljud, ljus, kvantmekaniska, ...). De fenomen vi beskriver i detta avsnitt kommer vi att förklara närmare senare.

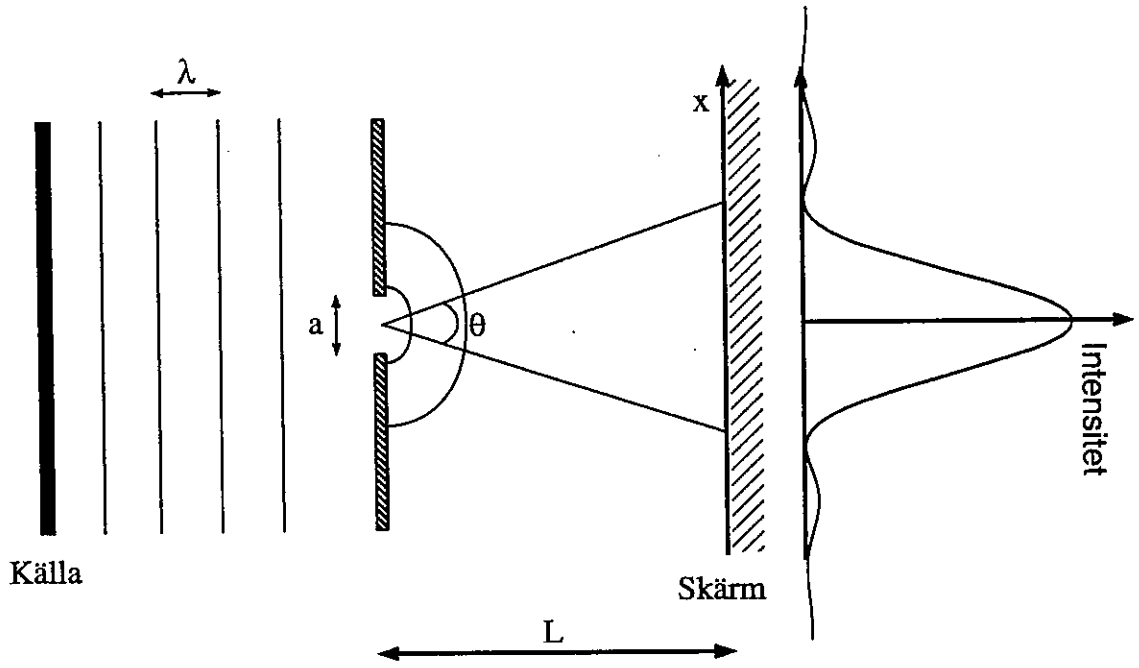
Diffraktion från ett hål

Fig. 1 visar en vattenyta sedd uppifrån. Källan längst till vänster är en lång rak stav som rör sig upp och ner i vattnet och bildar (plana) vågor som rör sig mot ett hinder med en öppning i. Vågtopparna visas som lodräta streck. Vågorna kallas *plana* eftersom dessa streck är raka. *Våglängden* λ är avståndet mellan två på varandra följande vågtoppar. Det intressanta är vad som händer med vågorna efter att de passerar hålet. Vågtopparna är nu böjda linjer. Istället för att fortsätta som plana vågor rakt fram så böjs vågorna av och återfinns också ovanför och nedanför hålet: Vågor går runt hörn, detta är typiskt för vågor. Ett hinder i vägen för en våg stoppar inte enbart en del av vågen utan ändrar också den fortsatta riktningen för vågen.

Förutom av våglängden λ så karakteriseras en våg av våghöjden, den sk amplituden, A, och av vågens hastighet v.

Låt oss studera vågorna på en skärm på avståndet L från ett hål med storlek a. Längst till höger i figuren finns en graf som visar vågornas *inten-*

sitet i olika punkter på skärmen. Intensiteten är proportionell mot vågornas amplitud i kvadrat, A^2. Vi kan därför tänka oss att grafen visar hur A^2 varierar längs skärmen. Man finner att intensiteten oscillerar: Den är störst mitt framför hålet inom ett område som vi kallar "huvudmaximum". Då man går längre från centrum faller intensiteten till noll för att sedan öka igen ("sekundärt maximum"), osv. Observera att intensiteten är noll i vissa punkter. Vattenytan är i dessa punkter helt ostörd, sådana punkter kallas noder. Huvudmaximat har bredden $\theta = 2\lambda/a$ (θ är vinkeln som huvudmaximat upptar). Den effekt som detta experiment visar kallas för diffraktion från ett hål.

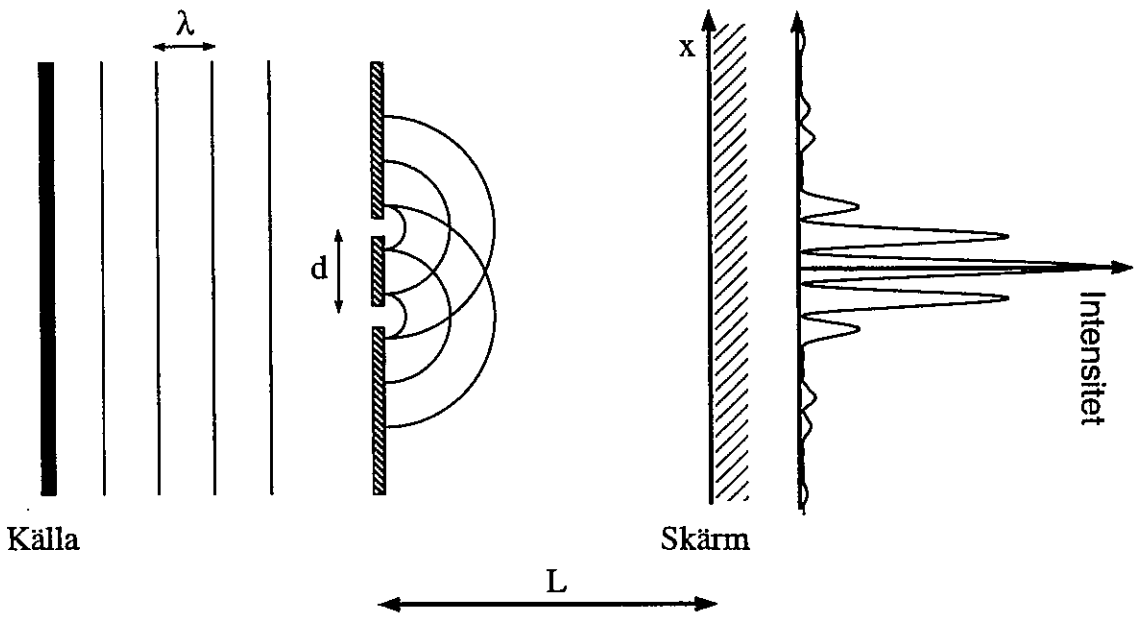


Figur 1: Diffraktion från ett hål

Om hålet görs mindre (a minskar) så kommer bredden på huvudmaximat att öka (θ ökar) och vågorna bakom skärmen ser alltmer halvcirkelformade ut. De liknar de vågor man får om man låter en punktformad källa doppas i vattnet (eller kastar en sten i vattnet). Vi drar slutsatsen att ett litet hål fungerar som en punktkälla för vågorna *efter* hålet.

Dubbelspaltexperimentet[1]

Låt oss nu ändra experimentet så att vi har två *små* hål på avståndet d från varandra, se fig. 2. Man finner återigen att intensiteten på skärmen oscillerar. Den har ett maximum i mitten med bredden $\theta = \lambda/d$ och blir noll i vissa punkter. Att hålen är små innebär att vardera hålet fungerar som en punktkälla och sänder ut cirkulära vågor. Det innebär också att om vi stänger ett av hålen och tittar på diffraktionsmönstret från det öppna hålet så kommer huvudmaximat att vara mycket brett, så brett att det omfattar många av oscillationerna i fig. 2.[2] (Jfr diskussionen ovan.)



Figur 2: Två hål

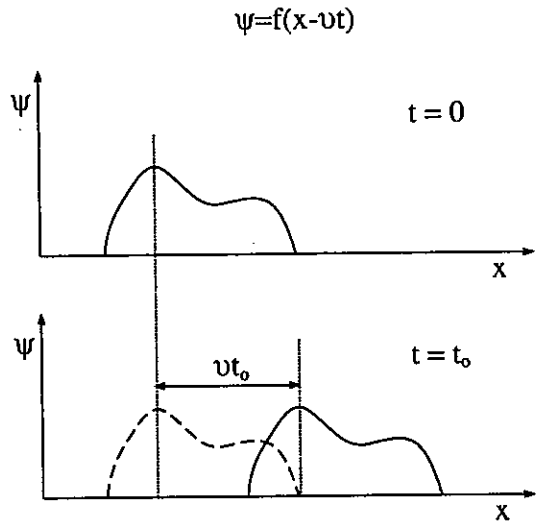
[1]Vattenvågor är vågor på en yta, dvs vågor i två dimensioner. Vi är också intresserade av vågor i rummet, dvs vågor i tre dimensioner. Man kan göra motsvarande experiment för sådana vågor och få liknande resultat. En "spalt" är en smal långsträckt öppning (en springa) som kan användas för vågor i tre dimensioner. Eftersom resultaten är så lika i två och tre dimensioner samt för hål och spalter så tillåter vi oss att slarva och blanda benämningarna.

[2]Det första minimat i diffraktionsmönstret faller där det ser ut att saknas en topp i fig. 2.

4.2 Matematisk beskrivning av vågor

Vi ska nu ge en matematisk beskrivning av vågor. I denna kurs begränsar vi oss till att studera sk linjära vågor. Dessa har egenskapen att om man har två vågor så är också summan av vågorna en våg. (Se avsnittet om "Superpositionsprincipen" nedan.) De kvantmekaniska vågorna har denna egenskap.

Vi börjar med vågor i *en* dimension, dvs vågor som rör sig längs en axel. Vi låter x beteckna läget längs denna axel. Ett exempel är vågor på en sträng som är uppspänd mellan två fästpunkter. Om vi slår till strängen så deformeras den; en störning bildas och rör sig längs strängen med en viss hastighet utan att formen på störningen ändras, detta är en våg. Fig. 3 visar ett exempel. I vila är strängen utsträckt längs x-axeln. $\psi(x)$ är strängens avvikelse från viloläget. I den övre figuren visas en sträng vid en viss tidpunkt ($t = 0$). I den nedre figuren visas strängen vid en senare tidpunkt ($t = t_o$). Allt som har hänt är att störningen, utan att deformeras, har flyttat sig åt höger en sträcka vt_o, v är vågens hastighet.



Figur 3: En våg

Vi kan beskriva detta matematiskt på följande sätt. När strängen är i vila är den utsträckt längs x-axeln. Låt $\psi(x,t)$ beteckna hur mycket strängen avviker från viloläget i punkten x vid tiden t. ψ beskriver alltså strängens läge. $\psi = 0$ betyder att strängen är i vila. ψ beskriver en störning som rör

sig längs strängen utan att störningens form ändras om (och endast om) ψ beror av x och t *enbart* i kombinationerna $x - vt$ och $x + vt$. Den allmänna matematiska formen på en våg är alltså:

$$\psi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad . \tag{7}$$

f och g kan vara vilka funktioner som helst. $f(x - vt)$ beskriver en våg som rör sig åt höger med hastigheten v och $g(x + vt)$ beskriver en våg som rör sig åt vänster med hastigheten v, se fig. 3.

Vi har nu gett en beskrivning av vågor i en dimension. Men vi kan också använda beskrivningen för vågor i fler dimensioner förutsatt att vågorna är *plana*. Ett exempel på detta är de vattenvågor som alstras av källorna i fig. 1. Vattenvågor är vågor på en yta, dvs vågor i två dimensioner. Om källan är lång och rak så kommer vågorna att vara plana (strecken till vänster om hålet i fig. 1 är raka). Dessa vågor kan vi beskriva som $\psi(y,t) = f(y - vt)$. ψ är våghöjden och y är riktningen vinkelrätt mot vågtopparna.[3] Observera att vågorna rör sig enbart i en viss riktning (y-riktningen). Till höger om hålet i fig. 1 är vågorna inte längre plana: Olika delar av vågorna rör sig i olika riktningar. Dessa vågor kan inte beskrivas av (7); vi återkommer till detta problem.

Harmoniska vågor

Särskilt viktiga är vågor där vågformen oscillerar som en sinusfunktion (eller cosinusfunktion). Sådana vågor kallas för *harmoniska* vågor och den allmänna formen är

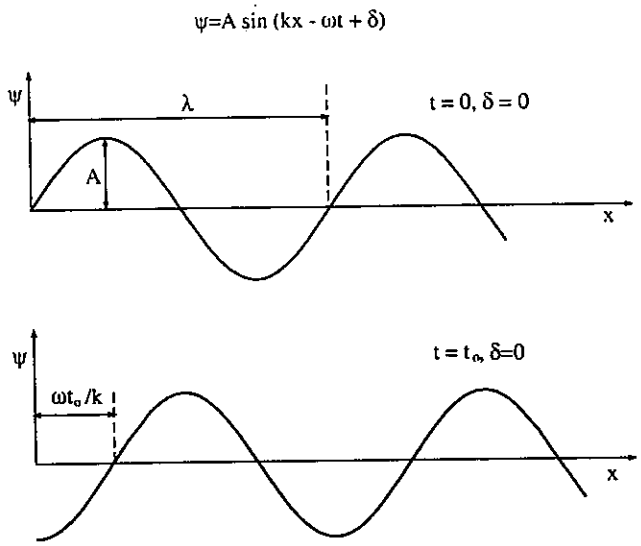
$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \delta) \quad . \tag{8}$$

k kallas för vågtalet, ω för vinkelfrekvensen, A är vågens *amplitud* och $kx - \omega t + \delta$ är vågens *fas* (δ är vågens fas i punkten $x = 0$ vid tiden $t = 0$).[4] Ett exempel visas i fig. 4. Den övre figuren visar vågen vid tiden $t = 0$ och den undre figuren visar vågen vid en senare tidpunkt $t = t_o$ då vågen flyttat sig sträckan $\omega t_o/k$. I figuren är våglängden λ definierad. Eftersom sinusfunktionen är periodisk med perioden 2π, så gäller

$$k\lambda = 2\pi \quad , \qquad \omega T = 2\pi \quad , \tag{9}$$

[3] Vi har, jämfört med ekv. (7), bytt x och y eftersom x-riktningen är längs skärmen i fig. 1.

[4] Observera att en cosinusvåg fås om $\delta = \pi/2$: $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$.



Figur 4: Harmoniska vågor

där T är perioden, dvs tiden för en svängning. (Antalet svängningar per tidsenhet är $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$, ν kallas för frekvens.) Vågen rör sig med hastigheten $v = \omega/k$ (jfr ekv. (7)).

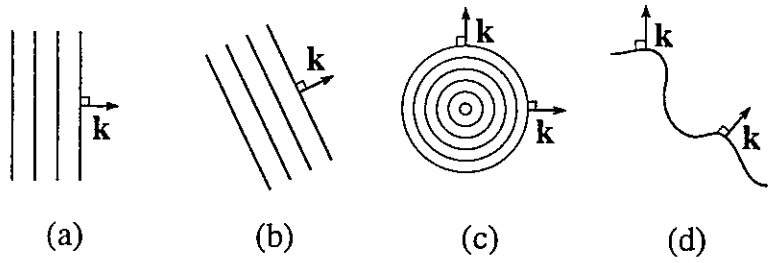
Harmoniska vågor är viktiga eftersom många vågor är av denna form (tex de vattenvågor som genereras av en källa som rör sig upp och ner, upp och ner,... i fig. 1). Men inte nog med detta, det visar sig att alla andra vågor kan uttryckas mha harmoniska vågor.[5] (Vågorna fås genom att superponera harmoniska vågor, se nedan.)

Vågor i två och fler dimensioner

Vågor som rör sig i en dimension beskrivs av $\psi(x,t)$, som är våghöjden i punkten x vid tiden t. En våg i två eller fler dimensioner kan vi beskriva genom att ge våghöjden i rumspunkten $\mathbf{r}$ vid tiden t: $\psi(\mathbf{r},t)$. $\mathbf{r}$ är en vektor som betecknar en punkt i rummet. I två dimensioner har vi $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, där $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ är enhetsvektorer i x- respektive y-riktningarna och x, y är koordinater i dessa riktningar.

Låt oss införa *vågvektorn* $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$. Denna är riktad i vågens rörelseriktning och är vinkelrät mot vågtopparna, dess längd är vågtalet:

[5]Detta kommer du att stöta på längre fram i din utbildning när du studerar Fourier-analys.



Figur 5: Vågor i två dimensioner

$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k$. Se fig. 5 för exempel på vågor i två dimensioner. Observera att vågvektorn kan vara olika på olika ställen i rummet.

En plan våg som rör sig i x-riktningen beskrivs som vi tidigare visat av

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad . \tag{10}$$

(Vi antar $\delta = 0$.) Med hjälp av vågvektorn kan vi skriva detta som

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad , \tag{11}$$

där $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ och $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$. (Använd regeln för skalärprodukt av två vektorer: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y$, om $\mathbf{a} = a_x\hat{\mathbf{x}} + a_y\hat{\mathbf{y}}$ och $\mathbf{b} = b_x\hat{\mathbf{x}} + b_y\hat{\mathbf{y}}$.)

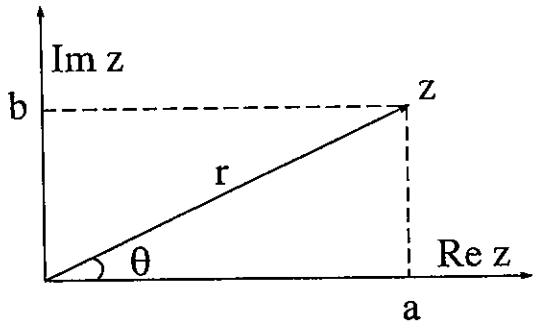
Om vi i ekv. (11) väljer $\mathbf{k}$ i någon annan riktning än x-riktningen, så får vi en plan våg som rör sig i denna riktning, se fig. 5 b. Så länge $\mathbf{k}$ är konstant, dvs samma vektor överallt i rummet så kommer vågen att vara plan. Men det är också möjligt att låta vektorn $\mathbf{k}$ variera i rummet, detta ger vågor som inte är plana, se fig. 5 b och c. På detta sätt beskriver $\psi(\mathbf{r}, t)$ vågor med godtycklig riktning. Vågor i tre (eller fler) dimensioner fås genom att låta $\mathbf{r}$ vara en vektor i tre (eller fler) dimensioner.

Komplexa vågor

För tex en vattenvåg är ψ som beskriver vågen i ekv. (7) en reell funktion. Det visar sig emellertid att det är praktiskt (och ibland nödvändigt) att använda *komplexa* funktioner ψ.

Ett komplext tal z kan uttryckas i två reella tal, (a, b) eller (r, θ), på följande sätt

$$z = a + ib = re^{i\theta} \quad , \tag{12}$$



Figur 6: Komplexa tal

se fig. 6. a är realdelen och b är imaginärdelen av z. $z = re^{i\theta}$ kallas för polär representation. Beloppet av z ges av $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = r$, ($\bar{z} = a - ib$ är komplexkonjugatet av z.) En viktig relation är

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad , \tag{13}$$

som bla ger sambandet mellan (a, b) och (r, θ). Vi inför nu komplexa harmoniska vågor som

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)} = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta) + Ai\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta) \quad . \tag{14}$$

Observera att real- och imaginärdelarna av $\tilde{\psi}$ är vanliga reella vågor.

Det finns två skäl att införa komplexa vågor. Dels är de användbara i problem där de riktiga fysikaliska vågorna är reella (tex vattenvågor). Man kan räkna med komplexa vågor och sedan ta imaginärdelen (eller realdelen) på slutet. Detta ger samma resultat som att använda reella vågor men kan vara enklare. Men det för oss viktigare skälet till att introducera komplexa vågor är att de kvantmekaniska vågorna är komplexa! Dvs både real- och imaginärdelen behövs i kvantmekaniken. (Det finns dock många kvantmekaniska problem där det räcker att använda reella vågor.)

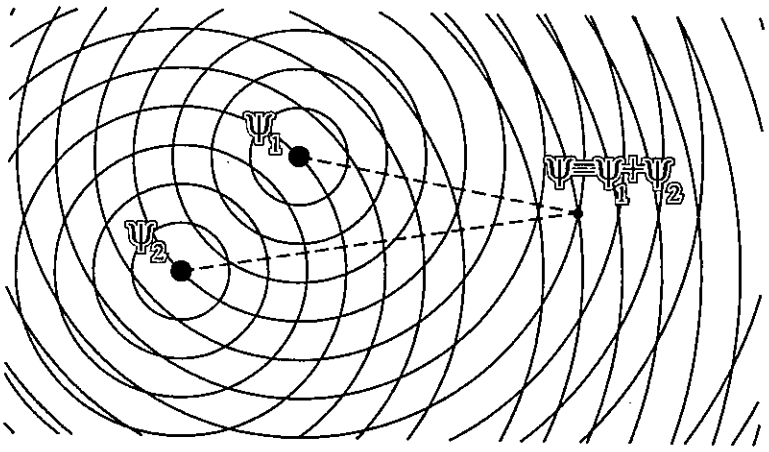
4.3 Superpositionsprincipen

Antag att vi har flera källor som alstrar vågor, vad blir den totala (sk *resulterande*) vågen? Det visar sig att man får den resulterande vågen genom att *superponera* vågorna från alla källorna. Ett exempel visas i fig. 7 där två punktkällor var och en genererar cirkulära vågor ψ_1 respektive ψ_2. Vi antar

att källa $i = 1, 2$ befinner sig i punkten $\mathbf{r}_i$ och alstrar cirkulära vågor med vågvektorn $\mathbf{k}_i$, vinkelfrekvensen ω_i och fasvinkeln δ_i: $\psi_i(\mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \omega_i t + \delta_i)$ är vågen från källa $i = 1, 2$ i en punkt $\mathbf{r}$ vid tiden t. Den totala (resulterande) vågen $\psi(\mathbf{r}, t)$ är *summan* av dessa båda vågor:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - \omega_1 t + \delta_1) + \psi_2(\mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) - \omega_2 t + \delta_2) \quad . \quad (15)$$

Vi skriver detta kortfattat som $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Observera att vågorna från de enskilda källorna samverkar - *interfererar* - och bildar den resulterande vågen. Det är detta som leder till de typiska interferenseffekterna. Det finns punkter i rummet till vilka vågtoppar från de båda källorna anländer samtidigt. I dessa punkter fås en stor amplitud. I andra punkter möts toppar från den ena källan och dalar från den andra. Om amplituderna på de båda vågorna är lika så släcker vågorna helt ut varandra och man får en sk nod. Om amplituderna är olika fås endast en partiell utsläckning.



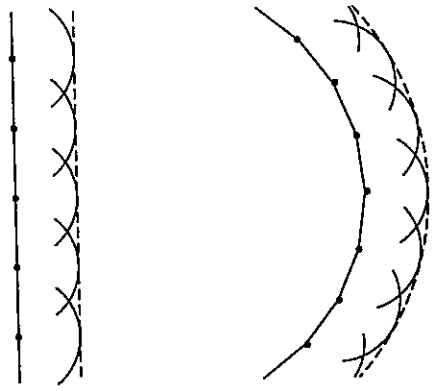
Figur 7: Superposition

För flera källor gäller följande *superpositionsprincip*: Om källorna S_i, $i = 1, 2, ...n$ genererar vågorna ψ_i, så är den resulterande vågen $\psi = \psi_1 + \psi_2 + ...\psi_n$.

4.4 Huygens princip

Det visar sig att en vågs utbredning kan bestämmas på följande sätt. Betrakta en vågfront (dvs en linje - i tre dimensioner en yta - med konstant

fas, tex en vågtopp eller vågdal). Vågens fortsatta utbredning fås genom att varje punkt på vågfronten betraktas som en (punktformig) källa för nya cirkulära - i tre dimensioner sfäriska - vågor. Den resulterande vågen är superpositionen av vågorna från alla dessa källor. I fig. 8 indikeras hur detta ger utbredningen av en plan respektive en cirkulär våg.



Figur 8: Huygens princip

Denna princip för en vågs utbredning kallas Huygens princip. (Varför fungerar detta? Man kan matematiskt visa att Huygens princip ger en utbredning av vågor som stämmer med den vanliga matematiska formuleringen av hur vågor utbreder sig.)

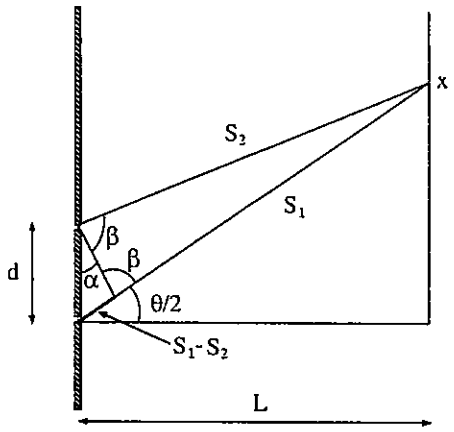
4.5 Dubbelspaltexperimentet - II

Vi återvänder nu till dubbelspaltexperimentet, se fig. 2. Vi skall med hjälp av superpositionsprincipen analysera det intensitetsmönster som uppstår på skärmen.

Vi antar att de två hålen är små.[6] Vart och ett av dem fungerar då som en punktkälla som alstrar cirkulära vågor (i området till höger om hålen). Superpositionsprincipen säger att den resulterande vågen är summan av vågorna från de två punktkällorna.

Betrakta nu en punkt x på skärmen längst till höger. Till denna punkt kommer (cirkulära) vågor från de båda hålen. Låt S_1 (S_2) vara avståndet

[6]Du kanske undrar hur små de måste vara. Svaret är att de skall vara mycket mindre än våglängden. När man säger att något är litet så menar man alltid att det är mycket mindre än något annat, även om man ofta inte säger detta uttryckligen.



Figur 9: Dubbelspalt

från hål 1 (2) till punkten x, se fig. 9. Låt oss börja i mittpunkten, dvs i den punkt som befinner sig lika långt från hål 1 som från hål 2: $S_1 = S_2$. Till denna punkt kommer vågtoppar (och vågdalar) från de båda hålen samtidigt. Man säger att vågorna kommer i *fas*; de förstärker varandra (konstruktiv interferens). Intensiteten som ju är proportionell mot amplituden i kvadrat blir därför stor i denna punkt: intensiteten har ett maximum. Om vi flyttar oss lite längs skärmen (ändrar x), så kommer vågtopparna inte längre att anlända samtidigt utan vågorna börjar ta ut varandra och intensiteten blir mindre. Då $S_1 - S_2 = \lambda/2$ kommer en vågtopp från hål 1 samtidigt som en vågdal från hål 2. Vågorna tar ut varandra och intensiteten blir noll.[7] Eftersom vågorna är periodiska fås ett maximum i intensiteten i varje punkt x som är sådan att skillnaden i avstånd till de båda hålen är ett helt antal våglängder: $S_1 - S_2 = n\lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. För $S_1 - S_2 = (n + 1/2)\lambda$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tar vågorna ut varandra och intensiteten blir noll. Detta förklarar oscillationerna i intensiteten i fig. 2.[8]

Vi skall nu visa att bredden på maximat i mitten av fig. 2 är $\theta = \lambda/d$. θ bestäms av att skillnaden i väg är en halv våglängd: $S_1 - S_2 = \lambda/2$. Vi antar att skärmen befinner sig mycket långt från hålen, dvs $L \to \infty$. I

[7]Vi antar här att vågorna från de två hålen har samma amplitud; detta är fallet om $S_1 \approx S_2$, vilket gäller om avståndet L till skärmen är stort.

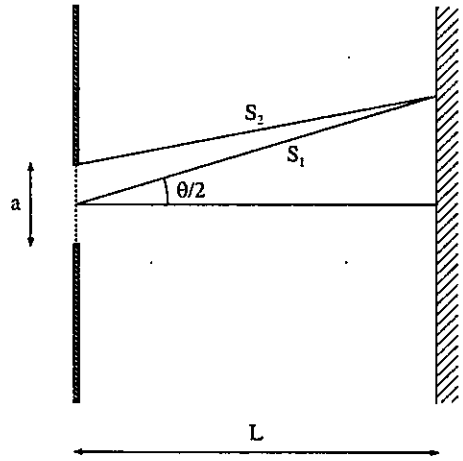
[8]Vi ser i fig. 2 att maxima har olika höjd och att två maxima ser ut att saknas. Dessa effekter förklaras av diffraktionsmönstret från ett hål, se fig. 1. Höjden på maxima, i fig. 2, minskar då man går från mitten eftersom intensiteten på vågorna från vart och ett av hålen minskar. Saknade maxima orsakas av minima i diffraktionsmönstret från ett hål.

denna gräns blir de båda linjerna S_1 och S_2 i fig. 9 parallella och därför gäller $\alpha = \theta/2$ och $\beta = \pi/2$. Vi får då $\sin\alpha = (S_1 - S_2)/d$. Eftersom vinkeln α är liten, $\alpha \ll 1$ (α mätt i radianer) gäller $\sin\alpha \approx \alpha$. Detta ger $\lambda = 2(S_1 - S_2) = 2d\sin\alpha \approx 2d\alpha = d\theta$.

Man bör komma ihåg att $\theta \propto \lambda/d$, men den exakta koefficienten är ej viktig att kunna.

4.6 Diffraktion från ett hål - II

Låt oss nu använda Huygens princip för att förstå diffraktion från ett hål. Hålet är en vågfront (eftersom de infallande vågorna är plana) och vi kan få vågutbredningen genom att tänka oss en rad av källor i hålet, se fig. 10. (Egentligen skall man ha en oändlig mängd källor, "en i varje punkt", men man får en god approximation genom att ha många.)



Figur 10: Diffraktion

Vi tänker oss att avståndet, L, till skärmen är mycket stort. Mitt framför hålet på skärmen kommer vågorna från alla källor att vara i fas (konstruktiv interferens). Man får därför ett maximum i amplitud, och därmed i intensitet, där. Låt oss *uppskatta* var första minimat ligger. För att få ett minimum krävs att vågor från olika källor har en skillnad i väg som är en halv våglängd (eller 3/2, ...). Speciellt måste det finnas vågor som släcker ut vågor från mitten av hålet. Störst skillnad i väg har uppenbarligen vågor från ändarna av hålet. Första minimum kommer därför att vara ungefär där skillnaden

i väg för vågor från centrum och från änden av hålet är en halv våglängd: $S_1 - S_2 = \lambda/2$. (Observera att man kan para ihop alla källor två och två så att avståndet mellan de två källorna i varje par är $a/2$; vågorna från de två källorna i varje par tar därför ut varandra.) Detta ger att vinkeln till första minimat är $\theta/2 \approx \lambda/a$.[9]

Det är bra att komma ihåg att $\theta \propto \lambda/a$, däremot är det inte viktigt att kunna koefficienten.

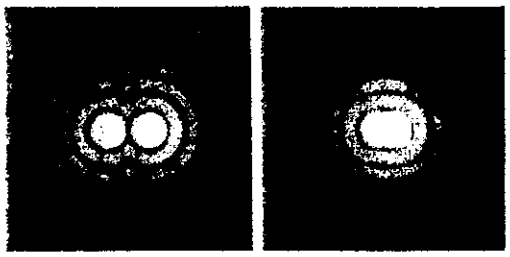
Dimensionsanalys är ett bra hjälpmedel i fysiken. Låt oss illustrera detta här. En stunds eftertanke leder oss till insikten att θ kan bero endast av a och λ (i gränsen $L \to \infty$). Eftersom θ är dimensionslös och a och λ båda har dimension längd, så kan θ enbart bero av a och λ i kombinationen a/λ.

4.7 Upplösningsförmåga

Vi har sett att vågor böjer av runt hörnen när de går genom ett hål. Effekten är stor om våglängden är stor. Vågor med kort våglängd rör sig däremot mer rätt fram. Ett hinder i deras väg blockerar deras utbredning men får dem inte att böja av. Detta gränsfall av vågutbredning kallas för geometrisk optik. Man inser lätt, mha Huygens princip, att vad vi sagt inte enbart gäller för hål, utan är sant för varje hinder i en vågs utbredning. Vågor med lång våglängd går runt hörn. Detta är något vi kan höra: bastoner hörs bättre än höga toner om man befinner sig i ett annat rum än ljudkällan. (Ljud är en vågrörelse i luft.)

En viktig slutsats är att varje hinder påverkar en vågs rätlinjiga utbredning. Man har alltid avvikelser från geometrisk optik. Detta har viktiga konsekvenser. En är att det är omöjligt att skapa en smal stråle av tex vanligt ljus som inte sprider ut sig och så småningom blir bred. (Ett sätt att försöka göra detta är ju just att låta ljuset gå genom ett litet hål.) En annan konsekvens är att bilder av föremål i mikroskop, teleskop etc. alltid blir suddiga. Detta leder till att det är omöjligt att med tex ett mikroskop särskilja ("upplösa") två föremål som ligger mycket nära varandra, se fig. 11. Man säger att mikroskopet har en viss upplösningsförmåga. Det visar sig att det minsta avstånd som kan ses är ungefär våglängden hos den använda vågen. Det ovan sagda är sant för alla vågor. Men eftersom kvantmekaniken säger att partiklar också är vågor så gäller det också för tex elektroner. Elektroner

[9] Resultatet fås direkt om man observerar att det geometriska problemet att bestämma θ är identiskt med dubbelspaltproblemet ovan om man byter ut d mot $a/2$.



Figur 11: (a) Bild av två väl separerade (upplösta) punktkällor. Diffraktionsmönstren från vardera källan syns tydligt. (b) Bild av två näraliggande punktkällor som knappt kan särskiljas. Diffraktionsmönstren flyter ihop till ett mönster. (Foton från M. Cagnet, M. Francon, and J. C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomenon*, Plate 16, Berlin: Springer-Verlag, 1962.)

har emellertid mycket kortare våglängd än ljus. Detta utnyttjas i elektronmikroskop, där ljuset är ersatt av elektroner och man får på så sätt en mycket bättre upplösningsförmåga.

5 FEYNMAN KAP. 1: Quantum Behavior

Kap. 1-2

Sannolikhetsbegreppet är viktigt att förstå.

I fig. 1-1 har P_{12} sitt maximum i $x = 0$, så är inte fallet om hålen är längre ifrån varandra (eller skärmen närmare hålen).

Kap. 1-3

Interferensbegreppet är mycket viktigt; vad betyder ordet interferens och varför är detta en lämplig beteckning?

Den matematiska beskrivningen av interferens i ekv. (1.2-4) är viktig. Observera att h_1 och h_2 inte är reella utan innehåller fasfaktorer, δ är skillnaden i fas mellan h_1 och h_2: $h_1/|h_1| = e^{i\delta}h_2/|h_2|$. Man kan visa ekv. (1.4) på följande sätt: Skriv de båda vågorna som

$$\psi_j = A_j e^{i\varphi_j} \quad , \quad \varphi_j = \mathbf{k}_j \mathbf{r}_j - \omega_j t + \delta_j \quad , \quad j = 1, 2 \quad ,$$

där A_j är reella. (Observera att h_j i Feynman är komplexa: $h_j = A_j e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r}_j + \delta_j)}$.) Fasskillnaden är $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, och intensiteten från källa j är $I_j = |\psi_j|^2 = A_j^2$. Totala intensiteten är $I_{12} = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |e^{i\varphi_1}|^2 |A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}|^2 = (A_1 + A_2 e^{i\delta})(A_1 + A_2 e^{-i\delta}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta$.

Kap. 1-4

Viktigt är att elektronerna anländer en och en, som likadana "klumpar", och att interferens observeras.

Elektronexperimentet som Feynman beskriver har nu utförts. För historien om detta experiment se Physics Worlds artikel
http://physicsweb.org/article/world/15/9/1

Feynman skriver "relative probability", detta är här detsamma som "probability".

Kap 1-5

Den matematiska beskrivningen är viktig, liksom insikten att det inte kan vara så att elektronerna har gått genom antingen det ena eller det andra hålet.

Kap. 1-6

Observera att i kvantmekaniken beskrivs ljus och elektroner på samma sätt (som "både våg och partikel"), medan de i klassisk fysik är olika: våg respektive partikel.

Ett föremål har en viss energi, E, och en viss rörelsemängd, p. Det visar sig att dessa i kvantmekaniken är relaterade till frekvens, ν, och våglängd, λ, för den våg som beskriver föremålet: $E = h\nu$, $p = h/\lambda$. h är Plancks konstant. Se vidare ekv. (2.1,2) i kap. 2.

Viktigt är att det är omöjligt att bestämma vilket hål elektronen gick genom utan att förstöra interferensmönstret.

Heisenbergs obestämdhetsrelation (kallas också osäkerhetsrelation) är mycket viktig; vi kommer tillbaka till den.

Observera att kvantmekaniken gäller för alla föremål, alltså även för kulor, men att de kvantmekaniska effekterna för stora föremål som regel är så små att de inte kan observeras. Stora föremål beskrivs därför väl av klassisk (dvs Newtons) mekanik (som är ett gränsfall av kvantmekaniken).

Kap. 1-7

Sammanfattningen är viktig; den gäller alla experiment och inte bara elektroner i dubbelspalt.

I klassisk fysik kan man i princip förutsäga exakt vad som kommer att hända om man vet ett systems egenskaper vid en viss tidpunkt och vet vilka krafter som påverkar systemet. (I praktiken finns en viss obestämdhet eftersom vi inte känner till allting exakt; denna osäkerhet gör att det kan vara bra att beskriva utfallet av ett experiment mha sannolikheter, som för kulorna i dubbelspalten.) I kvantmekanik däremot,

kan det även i princip vara omöjligt att exakt förutsäga vad som kommer att hända; det är nödvändigt att använda en sannolikhetsbeskrivning (även om man känner alla egenskaper så bra det går). Ett exempel på detta är att man inte kan förutsäga vilket hål en elektron skall passera genom; det finns en viss sannolikhet att den passerar det ena eller det andra hålet. (Om man kunde förutsäga detta skulle man inte få något interferensmönster.) Vi kommer att se detta klarare senare i kursen.

Kap. 1-8

Den matematiska formuleringen av Heisenbergs obestämdhetsrelation är viktig, vi återkommer till den.

För en bra artikel om obestämdhetsrelationen se Uffink, J. and Hilgevoord, J., "The Uncertainty Principle" *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), http://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/