Marcus Berg, 2010-11-29, v1.2

Kommentar: De två inlämningsuppgifterna ger 7 bonuspoäng var på tentan (som har 100 poäng totalt), med undantaget att man inte kan höja sig från underkänt till godkänt med de här poängen (godkänt = G i gamla systemet = E i sjugradiga skalan). Med andra ord, får man underkänt på tentan så räknas inte de här poängen.

Du får diskutera koncepten i uppgiften med andra studenter, men du får inte skriva detaljerade lösningar tillsammans med någon annan. Det är alltså inte något grupparbete. Lösningarna skall vara motiverade och tydligt visa hur du kom fram till svaret.

Sista inlämningsdatum till Marcus eller i Marcus fack: torsdag 2/12, kl. 18.15

Kvantfysikens principer, FK2003, Inlämningsuppg. 1: Schrödingers hund

Vi vill fördjupa oss i hur Schrödingers hund uppför sig om man betraktar ett lite mer "verkligt" system än vi gjort annars på kursen. I ett mer verkligt system tillåts omgivningen och i synnerhet mätapparaturen växelverka med hunden, något som man ju är tvungen till om man vill mäta något överhuvudtaget. Här är några koncept från Feynman 16-3 relevanta, men du behöver inte läsa det för att göra uppgiften.

Betrakta det totala tillståndet

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\psi_{\mathrm{h,s}}\rangle|\psi_{\mathrm{m,s}}\rangle + |\psi_{\mathrm{h,v}}\rangle|\psi_{\mathrm{m,v}}\rangle\Big)$$

där "s" står för "sover", "v" för "vaken", "h" för "hund" och "m" för mätapparatens detaljer (eller mer allmänt en "omgivning").

Sannolikheten att hitta hunden i läge x_h och mätutrustningen i läge x_m är

$$P(x_h; x_m) \;=\; |\langle x_h; x_m|\Psi\rangle|^2 \tag{1}$$

Vi kommer att diskutera lägesberoende senare, du behöver inte förstå detaljerna i den här ekvationen för att kunna göra uppgiften, bara att sannolikheten är absolutbeloppet i kvadrat av någon sannolikhetsamplitud. Som vi senare kommer att gå igenom förekommer här (våg-)funktioner ψ som beror på läget x. Om vi inte bryr oss vad mätapparatens detaljer är kan vi betrakta sannoliheten att hitta hunden i läget x_h *oavsett* vad omgivningen/mätapparaten är i för läge. Vi får en sådan "reducerad" sannolikhet genom att integrera över alla[1] lägen x_m:

$$P(x_h) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} dx_m P(x_h; x_m) \tag{2}$$

$$\;=\; \frac{1}{2}\Big[\psi_{\mathrm{h,s}}(x_h)^2 + \psi_{\mathrm{h,v}}(x_h)^2 + 2\psi_{\mathrm{h,s}}(x_h)\psi_{\mathrm{h,v}}(x_h) I_{\text{överlapp}}\Big] \tag{3}$$

[1] I praktiken måste det inte vara från $-\infty$ till ∞ utan det är en bra approximation att bara integrera över lägen där vågfunktionen är icke försumbar, dvs. över själva "bulan" på nästa sida.

där *överlappsintegralen* för mätapparaten är

$$I_{\text{överlapp}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_m \psi_{\text{m,s}}(x_m)\psi_{\text{m,v}}(x_m) \tag{4}$$

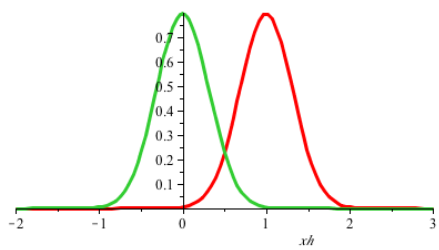
där jag har antagit att de individuella vågfunktionerna är normerade, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \psi^2 = 1$ när ψ är reell. Termen i $P(x_h)$ som innehåller $I_{\text{överlapp}}$ ser ut som en interferensterm.

Betrakta nu de konkreta vågfunktionerna

$$\psi_{\text{h,v}}(x_h) = a_h e^{-\frac{x_h^2}{2\sigma_h}}\ , \qquad \psi_{\text{h,s}}(x_h) = a_h e^{\frac{-(x_h-c_h)^2}{2\sigma_h}} \tag{5}$$

$$\psi_{\text{m,v}}(x_m) = a_m e^{-\frac{x_m^2}{2\sigma_m}}\ , \qquad \psi_{\text{m,s}}(x_m) = a_m e^{\frac{-(x_m-c_m)^2}{2\sigma_m}} \tag{6}$$

som ser ut som "kullar" eller "bulor" (eng. *bumps*), en centrerad i 0 och en i c_h respektive c_m:



$I_{\text{överlapp}}$ ger ungefär hur mycket area som är där kurvorna överlappar, dvs. mitt emellan dem.

a) Antag värdena $c_h = 1, c_m = 1, \sigma_m = 1/10, \sigma_h = 1/10$, då blir $a_h = a_m = \sqrt{5/\pi}$. Om tillstånden "vaken" och "sover" interfererar kvantfysiskt skulle vi kunna ha ganska stor chans att mäta $x_h = 0,5$, dvs. hunden är någonstans i mitten av tillstånden. Låt oss kalla värden $P(x_h = 0,5) > 0.15$ för "mer kvantfysisk"[2] och $P(x_h = 0,5) < 0.15$ för "mer klassisk". Givet tre värden $I_{\text{överlapp}} = 0,1$, $I_{\text{överlapp}} = 0,5$, $I_{\text{överlapp}} = 0,8$, skissa $P(x_h)$ i de tre fallen. Från de här exemplen, hur stor skall $I_{\text{överlapp}}$ ungefär vara för att hunden skall vara mer kvantfysisk? [3p]

b) När man "kopplar ihop" hunden och mätapparaten (eller omgivningen) blir överlappet mindre och mindre i tiden. Om man räknar ut överlappsintegralen blir den

$$I_{\text{överlapp}} = a_m^2 \sqrt{\pi\sigma_m} e^{\frac{-c_m^2}{4\sigma_m}}\ . \tag{7}$$

Låt oss anta att $\sigma_m(t) = \sigma_m/(\gamma t)$, för en konstant γ och säg att

$$\gamma = 10^7 s^{-1} \qquad \left(= \frac{\text{energi}}{\hbar} \right)$$

(när vi kommer till ammoniakmolekylen kommer vi prata mer om vad sådana här energier är, nu tar vi γ som givet.) Hur länge tar det innan hunden blir "mer klassisk" enligt definitionen ovan? [4p]

[2] Se diskussion nedan om du är intresserad av en närmare beskrivning av vad det här skall betyda, men det behövs inte för att lösa uppgiften.

Diskussion

När hunden blir mer klassisk kan vi prata om ett kvantfysiskt superpositionstillstånds "bräcklighet" – när det interagerar med andra system tenderar det att bli approximativt klassiskt. I den bemärkelsen är superposition av Schrödingers hund (eller katt, för den delen) inte något som man utan vidare skulle observera om man ställde upp experimentet som vi beskrivit det på kursen. Det måste nämligen vara ytterst väl isolerat från omvärlden för att det skall fungera, och även då kan det vara ganska korta tidsintervall som man kan observera hund-tillståndet i bemärkelsen jag har beskrivit det.

En "riktig" beräkning använder s.k. kvasiklassiska tillstånd (eng. *quasiclassical states*) istället för "bulorna". Där har man en mycket bättre implementering av "mer klassisk": det betyder att obestämdheten i läge och rörelsemängd blir mycket mindre än det klassiska centralvärdet. En superposition av kvasiklassiska bastillstånd kan bestå av två tillstånd med rörelsemängd i motsatta riktningar, som förstås överlappar mindre och mindre när tiden går helt enkelt för att de rör sig ifrån varandra, och man får en ekvation lik (7) för överlappet. Är du intresserad så kan jag gärna diskutera det privat!

Den allmänna tankegången (inte precis hur jag beskrivit det här, men i grova drag) att man måste ta med växelverkan med omgivningen för att tolka kvantfysik på det mest fysiskaliska sättet är i linje med idéer i kvantfysik som går under namnen *dekoherens* och *objektiv kollaps*. Vi kommer inte att gå in på det mer här, men det finns en del böcker om det, t.ex. den populärvetenskapliga "Kvarken och jaguaren" av nobelpristagaren Murray Gell-Mann, som diskuterar dekoherens i detalj.

Överkurs: bevisa ekvation (7). [1p!]

Överkurs: bevisa ekvation (3). [1p!]