Kvantfysikens principer

25/11

Feynman: "apparaten vänta" $U(t+\Delta t)$

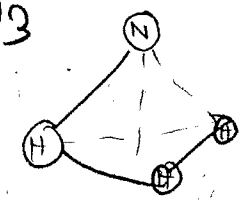
(amplitud att $|j\rangle$ har bytts till $\langle i|$ efter tiden Δt) $= \langle i|U(t+\Delta t)|j\rangle$

Taylorutveckla (små Δt):

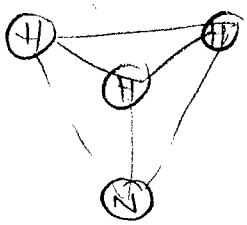
$$i\hbar \frac{dC_i(t)}{dt} = \sum_j H_{ij}(t) C_j(t) \quad (*)$$

tidsberoende schrödingerekvationen utan rums-(x-) beroende (kommer!)

Ex 1: NH_3 ammoniakmolekylen



$|1\rangle$



$|2\rangle$

allmänt tillstånd (tidsberoende!) $|\psi(t)\rangle = C_1(t)|1\rangle + C_2(t)|2\rangle$

(jfr. vektor som roterar: $\vec{A} = A_x(t)\hat{x} + A_y(t)\hat{y}$)

återigen matematisk analogi: ammoniakmolekylen roterar inte mellan $|1\rangle$ och $|2\rangle$!)

Lös (*): $H_{ij} = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$ "övergångs-energi"

$$i\hbar \frac{dC_1(t)}{dt} = E_0 C_1 - A C_2, \quad i\hbar \frac{dC_2(t)}{dt} = E_0 C_2 - A C_1$$

"kopplade"

Lösning: $C_1(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} + \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}$

$C_2(t) = \frac{a}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 - A)t} - \frac{b}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_0 + A)t}$

(Prova! Måste veta att t.ex. $\frac{d}{dt} e^{-iat} = -ia\, e^{-iat}$)

konstant

Specialfall:

$b = 0$

bägge har $E_0 - A$ i exponenten

vad är frekvensen?

Våg (x-oberoende): $e^{-i\omega t}$

identifiera $\omega = \frac{E_0 - A}{\hbar}$ (jfr. $C_1(t)$ ovan)

Bestämd frekvens!

Bestämd energi: $E_0 - A$

(kom ihåg till nästa gång!

vi vill ha $|1\rangle$ vid $t=0$

Stoppa in $t=0$:

$C_1(0) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

$C_2(0) = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$

sätt $a = b = 1 \Rightarrow C_1(0) = 1, \quad C_2(0) = 0$

dvs. vid tiden $t=0$ har vi

$|\psi(0)\rangle = C_1(0)|1\rangle + C_2(0)|2\rangle$

$= |1\rangle$ förstås!

(bara som koll)

Fortfarande specialfallet $a = b = 1$

allmänt t:

$$C_1(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}(t_0 - A)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}(t_0 + A)t}\right)$$

bryt ut $e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}t_0 t}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}(-A)t} + e^{-\frac{i}{\hbar}At}\right)\right)$$

$e^{+ix} + e^{-ix}$
$= \cos x + i\sin x$
$+ \cos(-x) + i\sin(-x)$
$\cos x \qquad -\sin x$
$= 2\cos x$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}t_0 t} \cdot \cos\frac{At}{\hbar}$$

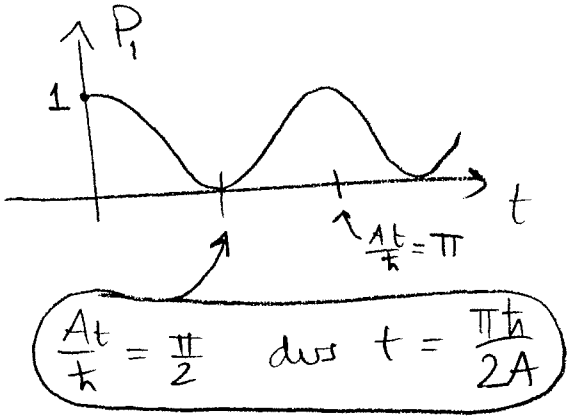
på samma sätt: $C_2(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}t_0 t} \sin\frac{At}{\hbar}$

(vi hann ungefär hit på torsdag)

P(hitta $|1\rangle$ efter tiden t, om vi hade $|1\rangle$ vid $t=0$)

kalla det här "P_1"

$$= |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2$$
$$= |C_1(t)|^2$$
$$= \left|e^{-\frac{i}{\hbar}t_0 t}\cos\frac{At}{\hbar}\right|^2$$
$$= \underbrace{\left|e^{-\frac{i}{\hbar}t_0 t}\right|}_{=1}\left|\cos\frac{At}{\hbar}\right|^2$$
$$= \cos^2\frac{At}{\hbar}$$

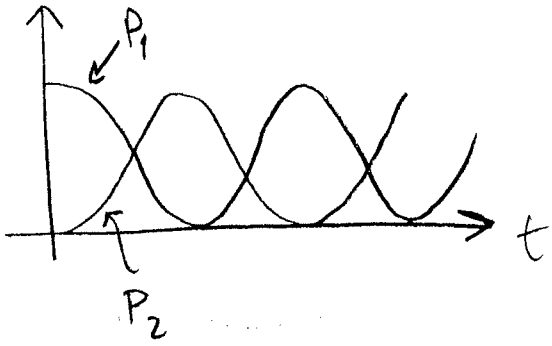


$\frac{At}{\hbar} = \frac{\pi}{2}$ dvs $t = \frac{\pi\hbar}{2A}$

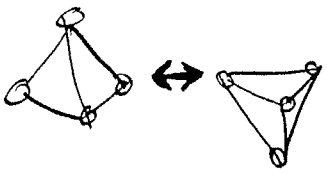
F 9.2: $A \approx 10^{-4}$ eV $\Rightarrow$ period $T = \frac{\pi\hbar}{A} \approx 10^{-10}$ eller 10^{-11} s

(Feynman: "24,000 megacukler"
$= 24$ GHz $\approx 10^{10}$ Hz)

för $|2\rangle$ på samma sätt: $P_2 = \sin^2 \frac{At}{\hbar}$



ammoniakmolekylens kvanttillstånd $|\psi(t)\rangle$ verkar byta mellan $|1\rangle$ och $|2\rangle$ väldigt snabbt och av sig självt!



tillståndet $|\psi(t)\rangle$ oscillerar mellan $|1\rangle$ och $|2\rangle$

... om vi tar t.ex. $t = \frac{\pi\hbar}{4A}$ då?

$$C_1 = \cos\frac{A\left(\frac{\pi\hbar}{4A}\right)}{\hbar} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_1 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad |\psi(t=\tfrac{\pi\hbar}{4A})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle \quad (*)$$

"alltså"

vad är det här för tillstånd?

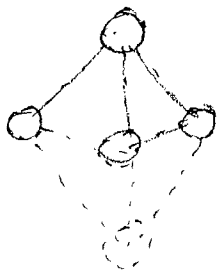
"katt-tillstånd"! sover/vaken?

Schrödinger 1935

Superpositionstillstånd:

varken $|1\rangle$ eller $|2\rangle$

utan både $|1\rangle$ och $|2\rangle$ samtidigt!



Kalla $(*)$ resp. det med minustecken för $|\mathrm{I}\rangle$ ("eins") och $|\mathrm{II}\rangle$ ("zwei")

Repetition om $|\mathrm{I}\rangle$ och $|\mathrm{II}\rangle$ senare.